

41 1-5. m. 19 $\frac{20}{n} 992$
1-5. m.
500g
П. АППЕЛЛЬ

и

С. ДОТЕВИЛЛЬ

Профессоръ Университета
въ Парижѣ.

Профессоръ Университета
въ Монпелье.

КУРСЪ

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Переводъ съ французскаго подъ редакціей и съ примѣчаніями

С. О. ШАТУНОВСКАГО

приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета

ВЫПУСКЪ I.



Одесса 1912.

ОТЪ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Не желая задерживать выхода книги въ свѣтъ, издательство рѣшило напечатать ее двумя выпусками, изъ коихъ первый содержитъ механику точки и геометрію массъ, а второй — механику системы. При этомъ также имѣлось въ виду облегчить учащемуся возможность пріобрѣтенія сравнительно дорогой книги покупкою ея по частямъ. Второй выпускъ выйдетъ весною 1912 года и будетъ содержать главы IX — XVIII и упражненія. Приводимъ здѣсь названія главъ: IX. Динамика системъ. X. Движеніе твердаго тѣла. XI. Трение. XII. Ударъ. XIII. Принципъ возможныхъ работъ. XIV. Принципъ Даламбера. Уравненія Лагранжа. XV. Ударъ. Теорема Карно. XVI. Притяженіе. Потенціалъ. XVII. Равновѣсіе и внутреннее движеніе совершенной жидкости. XVIII. Движеніе совершенныхъ жидкостей. Гидродинамика.

Сентябрь, 1911 г.

„Матезисъ“.

P. APPELL et S. DAUTHEVILLE

КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

<http://mathesis.ru>

(22)
Александров, Москва, 1922, X

П. АППЕЛЛЬ и С. ДОТЕВИЛЛЬ

Профессоръ Университета
въ Парижѣ.

Профессоръ Университета
въ Монпелье.

===== КУРСЪ ===== ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ВВЕДЕНИЕ ВЪ ИЗУЧЕНИЕ ФИЗИКИ
== И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ==

Переводъ съ французскаго

И. Л. ЛЕВИНТОВА

подъ редакціей и съ примѣчаніями

С. О. ШАТУНОВСКАГО

привать-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета



Александров
<http://mathesis.ru>

Одесса 1912

ОТЪ РЕДАКТОРА

Обширный трехтомный трактатъ П. Аппелля по механикѣ („*Traité de Mécanique rationnelle*“ par Paul Appell) переработанъ имъ и С. Дотевиллемъ въ однотомный курсъ и выпущенъ въ 1910 году въ свѣтъ подъ заглавіемъ: „*Précis de Mécanique rationnelle. Introduction à l'étude de la Physique et de la Mécanique appliquée, à l'usage des candidats aux certificats de licence et des élèves des écoles techniques supérieures. Par P. Appell et S. Dautheville*“. Въ этой переработкѣ курсъ Аппелля и Дотевилля представляетъ собою учебникъ теоретической механики, какъ бы специально приспособленный къ программамъ теоретической механики нашихъ высшихъ учебныхъ заведеній и полностью обнимающій эти программы. Если принять при этомъ во вниманіе доступность и мастерство изложенія, которыя такъ характерны для книгъ Аппелля, и большое количество упражненій, введенныхъ имъ въ „*Précis*“ въ видѣ приложенія въ въ концѣ книги и дающихъ изучающему предметъ обширный матеріалъ для самостоятельной работы, то можно надѣяться, что предлагаемый читателю въ русскомъ изданіи однотомный „Курсъ теоретической механики“ Аппелля и Дотевилля будетъ цѣннымъ вкладомъ въ нашу учебную литературу по теоретической механикѣ.

Имѣя въ виду сдѣлать книгу доступною и для лицъ, не посвятившихъ себя специальному изученію чистой математики, мы снабдили примѣчаніями тѣ немногія мѣста, пониманіе которыхъ, быть можетъ, могло бы представить нѣкоторыя затрудненія.

С. Шатуновскій.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
5	13 св.	$P_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$	$P_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$
13	7 сн.	$O'_1 G'_1$	$O'G'_1$
18	1 сн.	$\cos \widehat{R'G}$	$\cos \widehat{R'G'}$
25	15 св.	получится .	получатся
26	3 св.	по центральной оси.	по центральной оси и парѣ, плоскость которой перпендикулярна къ этой оси.
28	2 св.	$\eta = \frac{\Sigma P y_k}{\Sigma P_k}$	$\eta = \frac{\Sigma P_k y_k}{\Sigma P_k}$
30	4 сн.	даны	дана
30	на фиг. 20	перпендикуляръ изъ точки O къ плоскости xOy имѣть конецъ z' , а не z .	
31	19 св.	$P = \Sigma P$	$P = \Sigma P_k$
32	9 сн.	P_n ,	P_n
48	1 сн.	плсскости	плоскости
52	3 св.	векторъ M	векторъ MV
54	1 сн.	моменты).	моменты)
65	8 св.	AB	AB ,
71	1 св.	отношеній	соотношеній
84	9 сн.	скольженіемъ	поступательнымъ движеніемъ
89	1 св.	V_1	C
91	6 сн.	$V_x = 0$	$V_z = 0$
100	5 св.	V'_r приложенъ	V'_r и приложенъ
"	"	можно и	можно
101	1 св.	сравненія	сравненія;
124	16 сн.	P и M	P и M ;
194	4 св.	$\iint x dz$	$\iint x d\sigma$
270	5 сн.	$v_0 \sin \alpha$	$v_0 t \sin \alpha$
278	6 сн.	нулю;	нулю,
317	10 св.	$Y\psi'^2$	$Y\psi'$

СОДЕРЖАНИЕ

	СТР.
Введение	XV

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ СВѢДѢНІЯ

ГЛАВА I. — Векторы.

I. — Опребленія.

1. Геометрическія величины или векторы	1
2. Различные классы векторовъ	3

II. — Свободные векторы; три координаты свободнаго вектора.

3. Три координаты свободнаго вектора	4
4. Геометрическая сумма произвольнаго числа свободныхъ векторовъ.	6
5. Геометрическая разность	7
6. Результатъ преобразованія къ новымъ осямъ	8

III. — Приложенные векторы; пять координатъ приложеннаго вектора.

7. Общія замѣчанія	8
8. Положительное направленіе вращенія вокругъ оси	9
9. Моментъ вектора около точки (или полюса)	10
10. Моментъ около оси	10
11. Аналитическія выраженія	12
12. Пять координатъ приложеннаго вектора	14
13. Система сходящихся приложенныхъ векторовъ; ихъ результирующій векторъ	15
14. Системы произвольныхъ приложенныхъ векторовъ. Главный векторъ и главный моментъ	17
15. Измѣненіе главнаго вектора и главнаго момента; инварианты; центральная ось	18
16. Эквивалентныя системы приложенныхъ векторовъ	20

	стр.
17. Эквивалентность любой системы одному вектору и одной парѣ . . .	23
18. Эквивалентность системы двумъ векторамъ	25
19. Частные случаи эквивалентности	25
20. Заключение	26
21. Приложение общихъ теоремъ къ случаю параллельныхъ приложенныхъ векторовъ	26

IV. — Связанные векторы; шесть координатъ связаннаго вектора; центръ системы параллельныхъ связанныхъ векторовъ; геометрическія производныя.

22. Шесть координатъ связаннаго вектора	28
23. Центръ системы параллельныхъ связанныхъ векторовъ. Моменты относительно плоскости	28
24. Геометрическія производныя	34
25. Проекція производной вектора на самый векторъ и на перпендикулярное къ нему направление	35

V. — Полярный векторъ; осевой векторъ.

26. Природа симметріи вектора	37
---	----

ГЛАВА II. — КИНЕМАТИКА.

I. — Предметъ кинематики.

27. Опреѣленія	39
28. Относительность движенія	40
29. Подраздѣленія кинематики	40

II. — Скорость и ускореніе точки.

30. Движеніе точки	41
31. Опреѣленіе движенія	41
32. Векторъ-скорость	42
33. Средняя скорость въ теченіе конечнаго промежутка времени . . .	42
34. Аналитическія выраженія скорости	43
35. Векторъ-скорость, какъ геометрическая производная вектора . . .	44
36. Примѣры	45
37. Угловая скорость; круговое движеніе	45
38. Скорость въ цилиндрическихъ, или полуполярныхъ координатахъ .	48
39. Векторъ-ускореніе; годографъ	50
40. Аналитическія выраженія ускоренія	51
41. Нѣкоторые примѣры движенія точки	55
42. Диаграммы	60

III. — Движеніе твердаго тѣла.

43. Примѣры движенія твердаго тѣла	61
44. Поступательное движеніе	62

	СТР.
45. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси	65
46. Винтовое движеніе	69

IV. — Скорость въ относительномъ движеніи. Сложеніе поступательныхъ и вращательныхъ движеній. Скорости точекъ твердаго тѣла.

47. Замѣна системы сравненія; относительное движеніе, скорость . .	74
48. Приложение	76
49. Распредѣленіе скоростей въ твердомъ тѣлѣ, обладающемъ произвольнымъ движеніемъ. Винтовое касательное движеніе	81
50. Непрерывное движеніе	86
51. Первый частный случай	87
52. Второй частный случай	89
53. Третій частный случай	94

V. — Ускореніе въ относительномъ движеніи.

54. Теорема Кориолиса (Coriolis)	96
55. Поступательное движеніе подвижныхъ осей. Сложеніе движеній .	100
56. Примѣры	101

ГЛАВА III. — Принципы механики: МАССА, СИЛА, РАБОТА.

I. — Принципы

57. Неподвижныя оси	104
58. Матеріальная точка	105
59. Принципы	105
60. Силы	108
61. Принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія	108
62. Сложеніе силъ. Равнодѣйствующая	109
63. Равновѣсіе	110
64. Статика; динамика	111

II. — Единицы массы и силы; однородность.

65. Тяжесть; вѣсъ	111
66. Три основныя единицы	113
67. Статическое измѣреніе силъ	115
68. Однородность	116
69. Подобіе въ механикѣ	117

III. — Работа. Силовая функція. Силовое поле.

70. Элементарная работа	118
71. Аналитическое выраженіе элементарной работы	119
72. Полная работа	120

	СТР.
73. Сила зависитъ отъ времени или отъ скорости	121
74. Сила зависитъ отъ положенія движущейся точки. Силовое поле	121
75. Частный случай, когда полная работа зависитъ исключительно отъ начальнаго и конечнаго положеній движущейся точки; силовая функция; потенциалъ	124
76. Поверхности уровня	127
77. Примѣры	131
78. Размѣрность работы	134
79. Мощность	134
80. Главныя силовыя поля, разсматриваемыя въ физикѣ	134
81. Работа силъ, приложенныхъ къ системѣ точекъ	137
82. Примѣры	138

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

СТАТИКА.

ГЛАВА IV. — Равновѣсіе точки; равновѣсіе системы.

I. — Матеріальная точка.

83. Свободная точка	141
84. Примѣръ. Притяженія, пропорціональныя разстояніямъ	142
85. Точка, движущаяся на неподвижной поверхности безъ тренія	144
86. Движущаяся точка на неподвижной кривой безъ тренія	148

II. — Системы матеріальныхъ точекъ. Необходимыя универсальныя условія равновѣсія.

87. Системы матеріальныхъ точекъ	150
88. Внутреннія силы и внѣшнія силы; шесть необходимыхъ условий равновѣсія	150
89. Примѣры	153
90. Часть произвольной системы; шесть необходимыхъ условий равно- вѣсія	153

ГЛАВА V. — Равновѣсіе твердаго тѣла.

I. — Силы, приложенныя къ твердому тѣлу. Элементарныя операци.

91. Твердое тѣло	155
92. Элементарная операци	156

II. — Пары.

93. Пара	158
94. Основная теорема	159
95. Сложеніе паръ	161

III. — Приведеніе силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

	СТР.
96. Основная теорема	164
97. Приведеніе силъ	165
98. Аналитическое опредѣленіе элементовъ приведенія	166
99. Приведеніе системы силъ къ двумъ силамъ	167

IV. — Общія условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

100. Равновѣсіе	168
101. Пара не имѣетъ равнодѣйствующей	168
102. Приведеніе системы данныхъ силъ къ одной силѣ, приложенной къ точкѣ O , и къ одной парѣ возможно только однимъ способомъ	169
103. Аналитическія условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла	169
104. Частный случай: равновѣсіе сходящихся силъ	170
105. Равновѣсіе трехъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу	170

V. — Эквивалентность двухъ системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. Частный случай приведенія.

106. Условія эквивалентности двухъ системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу	172
107. Частные случаи приведенія	173
108. Заключение	174
109. Первый примѣръ: силы въ плоскости	175
110. Параллельныя силы	175

VI. — Твердыя тѣла, подчиненныя связямъ.

111. Методъ	178
112. Тѣло, имѣющее одну неподвижную точку	178
113. Твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось	180
114. Тѣло, вращающееся вокругъ оси и перемѣщающееся вдоль оси безъ тренія	182
115. Тѣло, опирающееся на неподвижную плоскость безъ тренія	182
116. Случай нѣсколькихъ твердыхъ тѣлъ	186

VII. — Центры тяжести.

117. Центры тяжести	187
118. Выраженія координатъ центра тяжести	188
119. Сплошныя тѣла	190
120. Центры тяжести линий. Общія формулы	190
121. Центръ тяжести поверхностей. Общія формулы	193
122. Центры тяжести объемовъ. Общія формулы	199

ГЛАВА VI. — Деформирующіяся системы.

123. Методъ	СТР. 203
-----------------------	-------------

I. — Нитевой многоугольникъ.

124. Опредѣленіе	204
125. Натяженіе	204
126. Равновѣсіе нитевого многоугольника. Многоугольникъ Вариньона (Varignon)	205
127. Условія на концахъ	207
128. Сходящіяся силы	209
129. Параллельныя силы	210
130. Кольца, скользящія вдоль нити	213

II. — Равновѣсіе нитей.

131. Уравненія равновѣсія	214
132. Общія теоремы	216
133. Общія интегралы	217
134. Случай, когда сила не зависитъ отъ дуги	218
135. Замѣчанія о натяженіи	219
136. Внутреннія уравненія равновѣсія нити	219
137. Формулы, дающія натяженіе въ случаѣ существованія силовой функции	221
138. Параллельныя силы	222
139. Центральныя силы	227
140. Равновѣсіе нити на поверхности	228

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

ДИНАМИКА.

ГЛАВА VII. — Динамика точки.

I. — Общія теоремы.

141. Уравненія движенія	233
142. Свободная точка	234
143. Несвободная точка	236
144. Внутреннія уравненія (Эйлеръ)	237
145. Количество движенія	238
146. Теорема о проекціи количества движенія	239
147. Теорема о моментѣ количества движенія. Начало площадей	240
148. Геометрическая интерпретація двухъ предыдущихъ теоремъ	243
149. Теорема живыхъ силъ	244
150. Единица живой силы	248

II. — Прямолинейное движение.

	СТР.
151. Уравнения прямолинейнаго движенія. Простые случаи интегрируемости	249
152. Приложенія къ движеніямъ, производимымъ силой, которая зависитъ лишь отъ положенія	251
153. Сила, зависящая лишь отъ скорости. Вертикальное паденіе тѣлъ, брошенныхъ въ сопротивляющейся средѣ	261
154. Данъ законъ прямолинейнаго движенія, требуется найти силу . .	267

III. — Криволинейное движение тяжелой точки въ пустотѣ и въ сопротивляющейся средѣ.

155. Сила постояннаго направленія	269
156. Тяжелая точка въ пустотѣ	270
157. Криволинейное движеніе тяжелаго тѣла въ сопротивляющейся средѣ	273

IV. — Центральныя силы. эллиптическое движеніе планетъ.

158. Уравненія движенія	280
159. Сила есть функція только отъ разстоянія	283
160. Случай, когда сила выражается въ формѣ $r^{-2}\varphi(\theta)$	286
161. Обратная задача. Опредѣленіе центральной силы, если траекторія дана	287
162. Движеніе планетъ. Слѣдствія изъ законовъ Кеплера	288
163. Прямая задача	290
164. Кометы	292
165. Спутники	294
166. Всемирное тяготѣніе	295

V. — Элементарныя свѣдѣнія изъ небесной механики.

167. Задача о n тѣлахъ	298
168. Опредѣленіе времени въ эллиптическомъ движеніи	303
169. Рѣшеніе уравненія Кеплера	308
170. Параболическое движеніе кометъ	309

VI. — Движеніе наэлектризованной частицы въ данномъ полѣ.

171. Уравненія движенія	310
-----------------------------------	-----

VII. — Движеніе точки по кривой.

172. Уравненія движенія	315
173. Случай неподвижной кривой	316
174. Нормальная реакція	318
175. Движеніе тяжелой точки по неподвижной кривой	319

	СТР.
176. Простой (математическій) маятникъ	323
177. Простой маятникъ въ сопротивляющейся средѣ	329
178. Циклоидальный маятникъ	332

VIII. — Движеніе точки по поверхности.

179. Уравненія движенія	334
180. Случай неподвижной поверхности	335
181. Геодезическія линіи	338
182. Движеніе по поверхности вращенія	339
183. Движеніе тяжелой точки по поверхности вращенія съ вертикаль- ной осью	341
184. Сферическій маятникъ	343
185. Безконечно малыя колебанія	350

IX. — Относительное равновѣсіе и относительное движеніе.

186. Уравненія относительнаго движенія точки	352
187. Относительное равновѣсіе	354
188. Равновѣсіе относительно поверхности земли	355
189. Движеніе относительно поверхности земли	357
190. Свободное паденіе тяжелой точки	359
191. Маятникъ Фуко	361

ГЛАВА VIII. — Моменты инерціи.

I. — Опредѣленія и примѣры.

192. Моменты инерціи	367
193. Опредѣленія моментовъ инерціи	367
194. Сплошныя системы	368

II. — Общія теоремы.

195. Измѣненіе момента инерціи системы вокругъ оси, перемѣщаю- щейся параллельно самой себѣ	372
196. Зависимость между моментами инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку. Эллипсоидъ инерціи (Пуансо)	374
197. Условіе, при которомъ ось Oz есть главная ось для точки O . . .	376
198. Не всякій эллипсоидъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ эллип- соидъ инерціи	377
Примѣчанія	379

ВВЕДЕНІЕ

Между математическими науками первое мѣсто занимаетъ наука счисленія, которая основывается на одномъ только понятіи о числѣ; къ этой наукѣ стремятся свести всѣ прочія. Затѣмъ слѣдуетъ геометрія, вводящая новое понятіе, а именно понятіе о пространствѣ; въ геометріи мы разсматриваемъ точки, которыми описываются линіи, линіи, которыми описываются поверхности, и т. д., но тамъ совсѣмъ не обращаютъ вниманія на время, въ теченіе котораго совершаются эти движенія. Это понятіе времени вводится болѣе сложной наукой — кинематикой, которая изучаетъ геометрическія свойства движеній въ ихъ отношеніяхъ къ времени, но не разсматриваетъ физическихъ причинъ этихъ движеній. Послѣдній вопросъ ставитъ себѣ механика. Нужно, однако, замѣтить, что мы не въ состояніи открыть истинныхъ причинъ физическихъ явленій, и вмѣсто реальныхъ причинъ, порождающихъ явленія, мы подставляемъ фиктивные, такъ называемыя силы, которыя могутъ произвести тѣ же самыя дѣйствія.

Предметъ механики состоитъ въ рѣшеніи двухъ слѣдующихъ задачъ:

1° найти движеніе, которое получаетъ система тѣлъ подѣйствіемъ данныхъ силъ;

2° найти силы, которыя могутъ сообщить системѣ тѣлъ данное движеніе.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ СВѢДѢНІЯ.

ГЛАВА I.

В Е К Т О Р Ы.

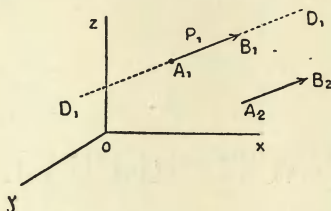
Геометрическая теорія векторовъ находитъ себѣ примѣненіе во многихъ важныхъ вопросахъ геометріи, кинематики, механики и физики: такъ, напримѣръ, посредствомъ векторовъ мы представляемъ скорости, ускоренія, вращенія, силы, вихри въ гидродинамикѣ и т. д. Мы изложимъ вкратцѣ существенные пункты ученія о векторахъ.

I. — ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Геометрическія величины или векторы.—Геометрической величиной или векторомъ называется отрѣзокъ прямой A_1B_1 (фиг. 1), имѣющій начало A_1 и конецъ B_1 . Если продолжить неограниченно прямую A_1B_1 , то прямая D_1 , которая получается при этомъ, называется прямой, на которой лежитъ или къ которой приложенъ векторъ; она также называется основаніемъ вектора.

Векторъ обыкновенно опредѣляется слѣдующими элементами: 1° своимъ началомъ, или точкой приложенія A_1 ; 2° направлениемъ, которое есть не что иное, какъ направленіе неограниченной прямой D_1 , служащей основаніемъ вектора; 3° стороной, въ которую направлено движеніе какого-либо тѣла при перемѣщеніи его отъ начала A_1 вектора къ его концу B_1 ; она обыкновенно обозна-

чается стрѣлкой, поставленной у конца вектора; 4° величиной P_1 , т. е. длиной отрезка A_1B_1 , измѣренной по опредѣленной шкалѣ.



Фиг. 1.

Когда мы называемъ векторъ A_1B_1 , то первая буква A_1 обозначаетъ начало, а вторая буква B_1 — конецъ вектора.

Нѣкоторые авторы при обозначеніи на письмѣ вектора A_1B_1 заключаютъ буквы въ скобки:

$$(A_1B_1);$$

другіе пишутъ:

$$\overrightarrow{A_1B_1}.$$

при чемъ стрѣлка надъ двумя буквами указываетъ, что рѣчь идетъ о векторѣ. Мы будемъ пользоваться чаще всего послѣднимъ обозначеніемъ.

Въ томъ случаѣ, когда возможность недоразумѣнія исключена, мы можемъ обозначать векторъ одной только буквой, — на примѣръ, буквой P_1 , — выражающей длину вектора; мы читаемъ тогда: векторъ P_1 и пишемъ

$$\overrightarrow{P_1}.$$

Два вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ называются геометрически равными, или экvipоллентными, если они равны, параллельны и направлены въ одну и ту же сторону (фиг. 1) *); это выражается равенствомъ

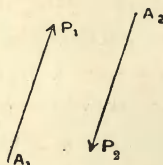
$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$$

или сокращенно:

$$\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_2}.$$

*) Гдѣ нѣтъ основанія опасаться недоразумѣній, мы будемъ называть одинаково направленными векторы, которые параллельны и направлены въ одну сторону. Параллельные и направленные въ противоположныя стороны векторы мы будемъ называть противоположно направленными.

Два вектора равны и противоположны, если они рав-



Фиг. 2.

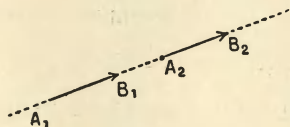
ны по величинѣ, параллельны и направлены въ противоположныя стороны (фиг. 2); это выражается равенствомъ

$$\vec{A_1B_1} = -\vec{A_2B_2} \quad \text{или равенствомъ} \quad \vec{P_1} = -\vec{P_2}.$$

2. Различные классы векторовъ. — Смотря по природѣ физическихъ и механическихъ величинъ, представляемыхъ векторами, они могутъ быть раздѣлены на три класса:

1° Во-первыхъ, можетъ случиться, что два геометрически равныхъ вектора представляютъ оба одну и ту же физическую или механическую величину. Напримѣръ, какъ мы увидимъ ниже, это имѣетъ мѣсто въ случаѣ векторовъ, представляющихъ моменты паръ. Въ такихъ случаяхъ говорятъ, что векторы не приложены, или также, что они свободны.

2° Во-вторыхъ, можетъ случиться, что одну и ту же физическую величину представляютъ два геометрически равные вектора A_1B_1 и A_2B_2 при томъ условіи, что оба они лежатъ на одной и той же прямой (фиг. 3), тогда какъ два геометрически



Фиг. 3.

равные вектора, лежащіе на двухъ различныхъ прямыхъ, представляютъ различныя физическія величины. Это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ случаѣ векторовъ, представляющихъ силы, приложенныя къ твердому тѣлу. Тогда говорятъ, что каждый изъ разсматриваемыхъ векторовъ приложенъ къ прямой, или что онъ есть векторъ, перемѣщающійся (скользящій) по прямой.

3° Наконецъ, можетъ случиться, что представляемая векторомъ физическая величина отличается тѣмъ, что два различныхъ вектора представляютъ двѣ различныя физическія величины, т. е., что векторъ не можетъ быть отдѣленъ отъ своей точки приложенія. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что векторъ приложенъ въ точкѣ или связанъ съ точкой; это относится, напримѣръ, къ вектору, изображающему скорость движущейся точки въ данный моментъ; мы увидимъ, дѣйствительно, что этотъ векторъ связанъ съ точкой.

Разсмотримъ послѣдовательно эти три рода векторовъ и охарактеризуемъ ихъ числами, которыя служатъ, такъ сказать, координатами векторовъ.

II. — СВОБОДНЫЕ ВЕКТОРЫ; ТРИ КООРДИНАТЫ СВОБОДНАГО ВЕКТОРА.

3. Три координаты свободнаго вектора. — Возьмемъ три оси *Oxyz* (фиг. 1); пусть X_1, Y_1, Z_1 будутъ алгебраическія величины проекцій вектора $\vec{A_1B_1}$ на три оси, при чемъ проектирование на каждую ось производится параллельно плоскости двухъ другихъ осей. Такъ какъ два геометрически равные вектора имѣютъ, очевидно, однѣ и тѣ же проекціи, а два вектора, имѣющие однѣ и тѣ же проекціи на трехъ осяхъ, геометрически равны, то свободный векторъ характеризуется тремя числами X_1, Y_1, Z_1 , которыя называются его координатами.

Два вектора $\vec{P_1}$ и $\vec{P_2}$, имѣющие соответственно проекціи X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 , геометрически равны, если дано, что

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2;$$

они равны и противоположны (фиг. 2), если

$$X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2.$$

Условія параллельности двухъ векторовъ. — Для того, чтобы два вектора $\vec{P_1}$ и $\vec{P_2}$ съ проекціями (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы ихъ проекціи были пропорціональны:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}, \quad (1)$$

Если два вектора параллельны и направлены въ одну и ту же сторону, то равныя отношенія (1) имѣютъ положительную величину, равную $+\frac{P_1}{P_2}$; если векторы параллельны и направлены въ противоположныя стороны, то общая величина отношеній (1) будетъ отрицательной и равна $-\frac{P_1}{P_2}$.

Случай прямоугольныхъ осей. Косинусы угловъ вектора съ осями. — Обозначимъ черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ косинусы угловъ, которые векторъ величины P_1 образуетъ съ осями Ox, Oy, Oz , предполагая, что оси прямоугольныя. Проектируя на оси, мы, очевидно, будемъ имѣть:

$$X_1 = P_1 \alpha_1, \quad Y_1 = P_1 \beta_1, \quad Z_1 = P_1 \gamma_1. \quad (2)$$

Кромѣ того,

$$P_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}.$$

Геометрическое или внутреннее произведеніе двухъ векторовъ; уголъ между ними. — Пусть P_1 и P_2 будутъ два вектора; ихъ геометрическимъ или внутреннимъ произведеніемъ (по Грассману) называется число

$$P_1 P_2 \cos (P_1 P_2),$$

которое получается при умноженіи произведенія величинъ векторовъ на косинусъ угла между ними. Въ разсматриваемомъ произведеніи первые два множителя положительные; третій же, т. е. $\cos (P_1 P_2)$, есть величина положительная, или отрицательная, или нуль въ зависимости отъ того, будетъ ли уголъ между двумя векторами острымъ, тупымъ или прямымъ.

Предположимъ, что оси прямоугольныя, и обозначимъ черезъ $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ проекціи двухъ векторовъ и черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — косинусы ихъ угловъ съ осями. Имѣемъ

$$\cos (P_1 P_2) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2,$$

или, замѣнивъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ найденными выше значеніями ихъ $\frac{X_1}{P_1}, \frac{X_2}{P_2}, \dots$, найдемъ, что

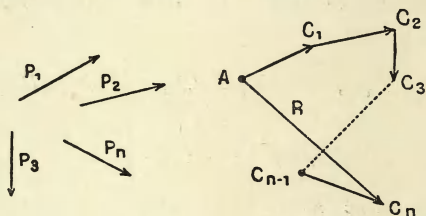
$$P_1 P_2 \cos (P_1 P_2) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2; \quad (3)$$

эта формула представляетъ собою аналитическое выраженіе геометрическаго произведенія двухъ векторовъ и дастъ намъ возможность вычислить косинусъ угла между ними.

Условіе перпендикулярности двухъ векторовъ. — Для того, чтобы векторы были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\cos(P_1 P_2)$ былъ равенъ нулю; при прямоугольныхъ осяхъ мы имѣемъ, слѣдовательно, условіе:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0. \quad (4)$$

4. Геометрическая сумма произвольнаго числа свободныхъ векторовъ. — Даны (фиг. 4) векторы $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$. Возьмемъ произвольную точку A и, исходя изъ этой точки, построимъ послѣдовательно одинъ за другимъ векторы, геометриче-



Фиг. 4.

ски равные даннымъ: векторъ AC_1 , геометрически равный вектору $\vec{P}_1$; затѣмъ векторъ C_1C_2 , геометрически равный вектору $\vec{P}_2$; затѣмъ векторъ C_2C_3 , геометрически равный вектору $\vec{P}_3, \dots$; наконецъ, векторъ $C_{n-1}C_n$, геометрически равный вектору $\vec{P}_n$. Векторъ AC_n , замыкающій полученную такимъ образомъ ломаную линію, называется геометрической суммой $\vec{R}$ данныхъ векторовъ; послѣдніе же называются составляющими.

Изъ выражений для проекцій геометрической суммы, которыя ниже будутъ приведены, вытекаетъ, что эта сумма не зависитъ отъ порядка, въ которомъ мы беремъ составляющіе векторы. Мы будемъ писать:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n,$$

чтобы выразить, что векторъ $\vec{R}$ есть геометрическая сумма данныхъ векторовъ.

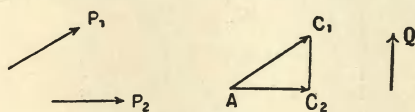
Проекціи геометрической суммы. — Пусть будутъ $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \dots, X_n, Y_n, Z_n$ проекціи векторовъ $P_1, P_2, \dots, P_n$, а X, Y, Z проекціи ихъ геометрической суммы P . По теоремѣ о

проекциях проекция вектора $\vec{R} = AC_n$ на любую ось равна сумме проекций на ту же ось последовательных сторон ломаной $AC_1C_2 \dots C_n$, т. е. составляющих векторов; мы имеем, следовательно,

$$\vec{R} \begin{cases} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, \end{cases}$$

Геометрическая сумма, равная нулю. — Если точка C_n совпадает с точкой A , то сумма $\vec{R}$ равна нулю; для этого необходимо и достаточно, чтобы каждая из проекций X, Y, Z была равна нулю.

5. Геометрическая разность. — Геометрической разностью двух векторов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ (фиг. 5) называется вектор $\vec{Q}$, который, будучи геометрически сложен с вектором $\vec{P}_2$, дает вектор $\vec{P}_1$.



Фиг. 5.

Проведем из точки A два вектора $\vec{AC}_1$ и $\vec{AC}_2$, геометрически равных данным векторам; вектор $\vec{Q}$, геометрически равный вектору $\vec{C_2C_1}$, есть искомый, потому что

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \vec{Q};$$

пишут также

$$\vec{Q} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2.$$

Проекция геометрической разности. — Пусть будут X, Y, Z проекции геометрической разности $\vec{Q}$ двух векторов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, проекции которых соответственно равны X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 .

Так как вектор $\vec{P}_1$ есть геометрическая сумма векторов $\vec{Q}$ и $\vec{P}_2$, то

$$X_1 = X + X_2, \quad \dots,$$

откуда

$$X = X_1 - X_2, \quad Y = Y_1 - Y_2, \quad Z = Z_1 - Z_2.$$

6. Результатъ преобразованія къ новымъ осямъ. — Раз-

смотримъ векторъ $\overrightarrow{A_1B_1}$, проекціи котораго въ прямоугольной системѣ координатъ $Oxyz$ равны X_1, Y_1, Z_1 ; если мы перенесемъ оси параллельно имъ самимъ, то проекціи вектора не измѣнятся. Достаточно поэтому рассмотреть, къ чему приводитъ поворотъ осей. Возьмемъ новый ортогональный трехгранный уголъ $Ox'y'z'$ и обозначимъ черезъ α, β, γ косинусы угловъ оси Ox' съ осями Ox, Oy, Oz ; черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — направляющіе косинусы оси Oy' и черезъ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — направляющіе косинусы оси Oz' . Обозначимъ черезъ X'_1, Y'_1, Z'_1 проекціи вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ на новыя оси. Если черезъ начало O проведемъ векторъ $\overrightarrow{OM}$, геометрически равный вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$, то координаты точки M относительно двухъ системъ осей въ точности будутъ проекціями X_1, Y_1, Z_1 и X'_1, Y'_1, Z'_1 даннаго вектора на оси. По формуламъ преобразованія координатъ мы имѣемъ, слѣдовательно,

$$\begin{cases} X'_1 = \alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma Z_1, \\ Y'_1 = \alpha_1 X_1 + \beta_1 Y_1 + \gamma_1 Z_1, \\ Z'_1 = \alpha_2 X_1 + \beta_2 Y_1 + \gamma_2 Z_1. \end{cases} \quad (5)$$

III. — ПРИЛОЖЕННЫЕ ВЕКТОРЫ; ПЯТЬ КООРДИНАТЪ ПРИЛОЖЕННАГО ВЕКТОРА.

7. Общія замѣчанія. — Предположимъ, что векторъ $\overrightarrow{A_1B_1}$, имѣющій величину P_1 , приложенъ къ точкѣ A_1 ; по опредѣленію, векторъ, перемѣщаясь по прямой D_1 , къ которой онъ приложенъ, продолжаетъ представлять ту же самую физическую величину. Когда векторъ перемѣщается такимъ образомъ вдоль прямой D_1 , на которой онъ лежитъ, онъ остается геометрически равнымъ самому себѣ, а потому его проекція на любую ось не измѣняется; но и другіе геометрическіе элементы, зависящіе отъ вектора, тоже остаются неизмѣнными.

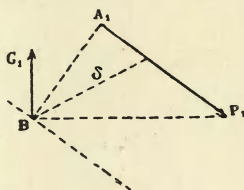
Разсмотримъ какую-нибудь неподвижную точку B въ пространствѣ (фиг. 6) и построимъ треугольникъ B_1A_1B , вершиной котораго служитъ точка B , а основаніемъ векторъ $\overrightarrow{P_1}$. Когда векторъ перемѣщается по прямой D_1 , слѣдующіе элементы остаются безъ измѣненій:

1° плоскость треугольника BA_1B_1 остается неподвижною; это есть плоскость BD_1 , опредѣляемая точкой B и прямой D_1 ;

вдоль оси Oz , и, имѣя ноги въ O и голову въ z , смотреть на уголъ xOy , ось Ox находится слѣва, а ось Oy справа.

Замѣчаніе. — Для того, чтобы при другомъ выборѣ положительнаго направленія вращенія формулы остались тѣ же, достаточно взять противоположныя расположенія осей.

9. Моментъ вектора около точки (или полюса). — Моментомъ (линейнымъ или векторіальнымъ) вектора $\vec{P}_1$ около (или



Фиг. 8.

относительно) точки B (фиг. 8) называется векторъ $\vec{BG}_1$, начало котораго находится въ точкѣ B и который имѣетъ:

1° длину, равную произведенію $P_1\delta$ длины вектора P_1 на его разстояніе δ отъ точки B , и

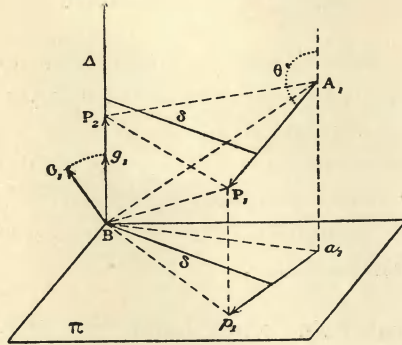
2° направленіе, перпендикулярное къ плоскости BA_1P_1 ; кроме того,

3° векторъ $\vec{BG}_1$ обращенъ въ такую сторону, что прямая, соединяющая точку B съ точкой, движущейся по прямой A_1P_1 отъ точки A_1 къ P_1 , вращается въ положительномъ направленіи вокругъ оси $\vec{BG}_1$.

Величина этого момента равна удвоенной площади треугольника BA_1P_1 ; она равна нулю, если длина P_1 или разстояніе δ равно нулю. Моментъ не измѣняется, если перенесемъ векторъ $\vec{P}_1$ въ какую-либо точку его основанія. Определенный такимъ образомъ моментъ $\vec{BG}_1$ есть векторъ, связанный съ точкой B .

10. Моментъ около оси. — Моментъ вектора $\vec{P}_1$ около (или относительно) оси Δ (фиг. 9), на которой выбрано положительное направленіе, равенъ алгебраической величинѣ проекціи на эту ось момента вектора $\vec{P}_1$ около любой точки, взятой на оси Δ .

Чтобы оправдать это определение, необходимо доказать, что величина, которую оно дает для момента вектора $\vec{P}_1$ относительно



Фиг. 9.

оси, не зависеть отъ выбора точки на этой оси. Черезъ точку B оси проведемъ плоскость Π , перпендикулярную къ оси; обозначимъ черезъ a_1p_1 проекцію вектора A_1P_1 на эту плоскость, черезъ BG_1 — моментъ вектора $\vec{P}_1$ относительно точки B и черезъ Bg_1 — проекцію этого момента на ось Δ . Имѣя въ виду, что уголъ между двумя плоскостями A_1BP_1 и a_1Bp_1 равенъ углу между перпендикулярами къ нимъ, найдемъ, что

$$2 \text{ площ. } a_1Bp_1 = 2 \text{ площ. } A_1BP_1 \cos \widehat{G_1Bg_1},$$

$$\overline{Bg_1} = \overline{BG_1} \cos \widehat{G_1Bg_1}.$$

Такъ какъ моментъ $\overline{BG_1}$ равенъ удвоенной площади треугольника A_1BP_1 , то абсолютная величина его проекции $\overline{Bg_1}$ равна также удвоенной площади треугольника a_1Bp_1 , которая, очевидно, не зависитъ отъ выбора точки B на оси Δ . Знакъ этой проекции $\overline{Bg_1}$ также не зависитъ отъ выбора точки B ; проекція имѣетъ знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, вращается ли тѣло, перемѣщающееся по вектору A_1P_1 , въ положительномъ или отрицательномъ направленіи вокругъ оси Δ .

Изъ предыдущаго выводятся различныя выраженія для момента вектора P_1 относительно оси.

Обозначимъ черезъ δ кратчайшее разстояніе вектора отъ оси и черезъ θ — уголъ между векторомъ и осью; проекція кратчайшаго

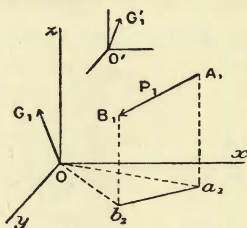
разстоянія δ на плоскость Π есть δ , проекція p_1 равна $P_1 \sin \theta$ и моментъ $\mathfrak{M}_1$ вектора p_1 около точки B опредѣляется равенствомъ

$$\mathfrak{M}_1 = \pm p_1 \delta = \pm P_1 \delta \sin \theta, \quad (6)$$

гдѣ нужно взять знакъ $+$ или $-$ соотвѣтственно положительному или отрицательному направленію вращенія вокругъ оси Δ тѣла, перемѣщающагося по вектору $A_1 P_1$.

Эта формула показываетъ, что моментъ относительно оси есть нуль, когда одинъ изъ трехъ множителей P_1 , δ , $\sin \theta$ равенъ нулю, т. е. когда векторъ есть нуль или когда онъ лежитъ въ одной плоскости съ осью.

11. Аналитическія выраженія: 1° Моменты вектора около координатныхъ осей. — Возьмемъ векторъ P_1 (фиг. 10), имѣющій начало A_1 и конецъ B_1 ; обозначимъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты точки приложенія A_1 и черезъ X_1, Y_1, Z_1 проекціи вектора на прямоугольныя оси Ox, Oy, Oz . Моментъ N_1 вектора относительно оси Oz равенъ проекціи удвоенной площади треугольника $OA_1 B_1$ на



Фиг. 10.

плоскость xOy , взятой съ надлежащимъ знакомъ. Одна изъ вершинъ проекціи треугольника находится въ началѣ O , двѣ другія вершины a_1 и b_1 имѣютъ въ плоскости xOy координаты x_1, y_1 и $x_1 + X_1, y_1 + Y_1$.

Если обозначимъ черезъ r, r' разстоянія Oa_1, Ob_1 и черезъ θ, θ' углы xOa_1, xOb_1 , то мы будемъ имѣть въ полярныхъ координатахъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta, & y_1 &= r \sin \theta, \\ x_1 + X_1 &= r' \cos \theta', & y_1 + Y_1 &= r' \sin \theta'. \end{aligned}$$

Алгебраическая величина момента N_1 , т. е. удвоенная площадь треугольника Oa_1b_1 , выразится такъ:

$$N_1 = rr' \sin (\theta' - \theta) = r \cos \theta r' \sin \theta' - r \sin \theta r' \cos \theta',$$

откуда, возвращаясь къ декартовымъ координатамъ, получимъ:

$$N_1 = x_1 (y_1 + Y_1) - y_1 (x_1 + X_1) = x_1 Y_1 - y_1 X_1.$$

Для моментовъ L_1 и M_1 вектора около осей Ox и Oy мы найдемъ точно такимъ же образомъ:

$$L_1 = y_1 Z_1 - z_1 Y_1, \quad M_1 = z_1 X_1 - x_1 Z_1.$$

2° Моментъ вектора около начала. — Моментъ OG_1 вектора P_1 около начала O есть векторъ, проекціи котораго на три оси равны соответственно L_1 , M_1 , N_1 : это непосредственно слѣдуетъ изъ самого опредѣленія момента вектора около оси.

3° Моментъ вектора около произвольной точки. — Если возьмемъ какую-нибудь другую точку O' съ координатами x' , y' , z' , то координаты точки A_1 около новыхъ осей, параллельныхъ прежнимъ и имѣющихъ началомъ точку O' , будутъ равны $x_1 - x'$, $y_1 - y'$, $z_1 - z'$. Проекціи вектора на эти оси попрежнему соответственно равны X_1 , Y_1 , Z_1 , моменты его около новыхъ осей будутъ равны величинамъ, которыя получаются, когда въ выраженіяхъ для L_1 , M_1 , N_1 мы замѣнимъ координаты x_1 , y_1 , z_1 координатами $x_1 - x'$, $y_1 - y'$, $z_1 - z'$:

$$L'_1 = (y_1 - y') Z_1 - (z_1 - z') Y_1,$$

$$M'_1 = (z_1 - z') X_1 - (x_1 - x') Z_1,$$

$$N'_1 = (x_1 - x') Y_1 - (y_1 - y') X_1,$$

Моментъ $O'_1G'_1$ того же вектора относительно точки O' есть векторъ, проекціями котораго служатъ моменты L'_1 , M'_1 , N'_1 . Пользуясь выраженіями для моментовъ L_1 , M_1 , N_1 , мы можемъ также написать:

$$L'_1 = L_1 - (y' Z_1 - z' Y_1),$$

$$M'_1 = M_1 - (z' X_1 - x' Z_1),$$

$$N'_1 = N_1 - (x' Y_1 - y' X_1).$$

12. Пять координатъ приложеннаго вектора. — Шесть количествъ $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$, не независимы; они удовлетворяютъ тождеству

$$L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1 = 0, \quad (7)$$

которое выражаетъ, что моментъ $\overrightarrow{OG_1}$ перпендикуляренъ къ вектору $\overrightarrow{A_1 B_1}$.

Наоборотъ, положимъ, что шесть количествъ $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$, изъ которыхъ первыя три не всѣ равны нулю, удовлетворяютъ соотношенію (7). Можно доказать, что существуетъ безчисленное множество векторовъ, проекціи которыхъ равны X_1, Y_1, Z_1 и моменты которыхъ суть L_1, M_1, N_1 ; но всѣ эти векторы могутъ быть получены изъ одного изъ нихъ путемъ перемѣщенія его вдоль его основанія. Дѣйствительно, три уравненія

$$L_1 = yZ_1 - zY_1, \quad M_1 = zX_1 - xZ_1, \quad N_1 = xY_1 - yX_1,$$

въ которыхъ x, y, z обозначаютъ текущія координаты, представляютъ прямую D_1 , такъ какъ, въ силу соотношенія (7), они приводятся къ двумъ уравненіямъ¹⁾. Возьмемъ на этой прямой произвольную точку A_1 ; векторъ P_1 съ началомъ A_1 и проекціями X_1, Y_1, Z_1 направленъ по прямой D_1 , а моменты его около осей равны L_1, M_1, N_1 .

Изъ шести количествъ $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$, пять могутъ быть взяты произвольно, шестое же опредѣляется соотношеніемъ (7). Мы можемъ, слѣдовательно, сказать, что приложенный векторъ опредѣляется пятью произвольными числами, напимѣръ, числами X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1 , которыя мы можемъ называть координатами вектора. Однако, для симметріи принято называть координатами приложеннаго вектора количества $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$, при чемъ предполагается, что эти числа связаны соотношеніемъ (7).

Если мы условимся называть эквивалентными приложенными векторами два вектора, которые лежатъ на одной прямой и могутъ переходить одинъ въ другой путемъ перемѣщенія вдоль ихъ основанія, то мы можемъ сказать: для того, чтобы два приложенные вектора были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имѣли однѣ и тѣ же координаты.

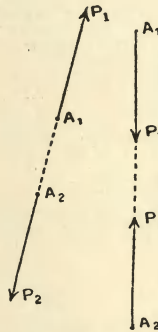
Равные и прямопротивоположные векторы. — Два вектора называются равными и прямопротивоположными, если

они лежать на одной прямой и равны, но направлены въ противоположныя стороны (фиг. 11). Для того, чтобы два вектора P_1 и P_2 были равны и прямопротивоположны, необходимо и достаточно, чтобы ихъ координаты были равны, но имѣли противоположные знаки:

$$\begin{aligned} X_1 &= -X_2, & Y_1 &= -Y_2, & Z_1 &= -Z_2, \\ L_1 &= -L_2, & M_1 &= -M_2, & N_1 &= -N_2. \end{aligned}$$

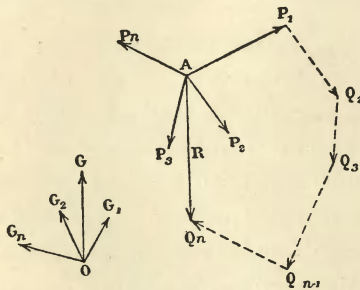
Это непосредственно вытекаетъ изъ опредѣлений.

13. Система сходящихся приложенныхъ векторовъ; ихъ результирующій векторъ. Пусть $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ будутъ приложенные векторы, основанія которыхъ сходятся въ одной точкѣ A . Каждый изъ этихъ векторовъ можно такъ перенести вдоль его



Фиг. 11.

основанія, чтобы векторы были приложены къ самой точкѣ A , какъ показано на фигурѣ 12. Главнымъ или результирующимъ век-



Фиг. 12.

торомъ разсматриваемой системы векторовъ называется векторъ $\vec{R}$, равный геометрической суммѣ этихъ векторовъ и приложенный въ

точкѣ A , или любой изъ векторовъ, которые получаются изъ вектора $\vec{R}$ при перемѣщеніи его вдоль его же основанія. На фигурѣ 12 этотъ главный векторъ построенъ слѣдующимъ образомъ: исходя изъ точки A , послѣдовательно одинъ за другимъ построены векторы $AP_1, P_1Q_2, \dots, Q_{n-1}Q_n$, геометрически равные даннымъ; векторъ AQ_n есть главный векторъ R .

Проекціи результирующаго вектора R . — Мы знаемъ уже (п. 4), что проекціи X, Y, Z вектора R на три оси равны соответственно суммамъ проекцій составляющихъ векторовъ:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad Y = \sum Y_k, \quad Z = \sum Z_k.$$

Моменты результирующаго вектора около трехъ осей. — Обозначимъ черезъ x, y, z координаты точки A . Моменты вектора $P_k (X_k, Y_k, Z_k)$ около осей суть

$$L_k = yZ_k - zY_k, \quad M_k = zX_k - xZ_k, \quad N_k = xY_k - yX_k;$$

моменты результирующаго вектора около тѣхъ же осей равны

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX.$$

Подставляя приведенныя выше выраженія для X, Y, Z , мы легко найдемъ, что

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n, \quad M = \sum M_k, \quad N = \sum N_k.$$

Итакъ, моментъ результирующаго вектора системы сходящихся векторовъ около произвольной оси равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ векторовъ около той же оси.

Моментъ результирующаго вектора около полюса (линейный моментъ). — Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что моментъ результирующаго вектора системы сходящихся векторовъ около точки O есть геометрическая сумма моментовъ составляющихъ векторовъ. Дѣйствительно, если возьмемъ полюсъ O за начало координатъ, то проекціи на три оси момента OG результирующаго вектора около этой точки соответственно равны L, M, N ; проекціи момента OG_k вектора P_k около той же точки O соответственно равны L_k, M_k, N_k ; предыдущія уравненія и выражаютъ именно, что моментъ OG есть геометрическая сумма моментовъ $OG_1, OG_2, \dots, OG_n$.

Координаты результирующего вектора.—Мы можем сказать, что координаты X, Y, Z, L, M, N результирующего вектора системы сходящихся векторов равны суммам соответственных координат составляющих векторов.

Закключение. Так как любая ось может быть взята за одну из координатных осей, то мы видим, что проекция на ось результирующего вектора системы сходящихся векторов равна сумме проекций этих векторов на эту ось; момент результирующего вектора около оси равен сумме моментов этих векторов около той же оси.

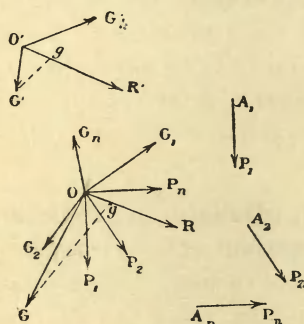
14. Системы произвольных приложенных векторов.

Главный вектор и главный моментъ. — Дана произвольная система приложенных векторов $P_1, P_2, \dots, P_n$ и их точки приложения $A_1, A_2, \dots, A_n$; взявъ произвольную точку O , мы назовем:

1° главным вектором около полюса O геометрическую сумму OR векторов $OP_1, OP_2, \dots, OP_n$, началом которых служит точка O и которые геометрически равны данным векторам, и

2° главным моментом около полюса O — геометрическую сумму OG моментов $OG_1, OG_2, \dots, OG_n$ данных векторов около этой точки.

Если мы будем изменять положение точки O въ пространствѣ, то главный вектор OR , какъ это вытекаетъ уже изъ его



Фиг. 13.

опредѣленія, сохраняетъ свою прежнюю величину и направленіе; напротивъ, главный моментъ OG (фиг. 13) изменяется, за исклю-

ченіемъ, какъ это ниже будетъ указано, того случая, когда точка O перемѣщается по прямой OR .

Возьмемъ начало прямоугольныхъ осей въ точкѣ O ; обозначимъ черезъ x_k, y_k, z_k координаты точки A_k , черезъ X_k, Y_k, Z_k проекціи вектора P_k и черезъ L_k, M_k, N_k его моменты около трехъ осей. Обозначимъ, далѣе, черезъ X, Y, Z проекціи на оси координатъ главнаго вектора OR и черезъ L, M, N проекціи на тѣ же оси главнаго момента OG около точки O . Обозначая черезъ Σ сумму, распространенную на всѣ рассматриваемые векторы, мы будемъ имѣть:

$$(R) \quad X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad Z = \Sigma Z_k,$$

$$(G) \quad L = \Sigma L_k, \quad M = \Sigma M_k, \quad N = \Sigma N_k.$$

Пусть x', y', z' будутъ координаты другой точки O' ; мы видѣли (п. 11), что моментъ $O'G'_k$ какого-либо вектора P_k около точки O' имѣетъ проекціи

$$(G'_k) \quad \begin{cases} L'_k = L_k - (y'Z_k - z'Y_k), \\ M'_k = M_k - (z'X_k - x'Z_k), \\ N'_k = N_k - (x'Y_k - y'X_k). \end{cases}$$

Поэтому, если назовемъ черезъ X', Y', Z' и L', M', N' проекціи на оси координатъ главнаго вектора $O'R'$ и главнаго момента $O'G'$, то получимъ:

$$(R') \quad X' = \Sigma X_k = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z,$$

$$(G') \quad \begin{aligned} L' &= \Sigma L'_k = L - (y'Z - z'Y), & M' &= M - (z'X - x'Z), \\ & & N' &= N - (x'Y - y'X). \end{aligned}$$

Посредствомъ этихъ формулъ мы можемъ вычислить главный векторъ R' и главный моментъ G' для любой точки O' , если извѣстны значенія ихъ для одной точки O . Формулы показываютъ, что главный моментъ $O'G'$ около точки O' равенъ геометрической суммѣ главнаго момента около точки O и момента около точки O' главнаго вектора OR , приложеннаго къ точкѣ O^2).

15. Измѣненіе главнаго вектора и главнаго момента; инварианты; центральная ось. — Предположимъ сперва, что главный векторъ отличенъ отъ нуля; тогда главный моментъ G' отличенъ отъ G , если только точка O' не лежитъ на прямой OR . Проекція же главнаго момента на направленіе главнаго вектора есть величина постоянная. Въ самомъ дѣлѣ:

$$R'G' \cos \widehat{R'G} = L'X' + M'Y' + N'Z'; \quad 3)$$

правая часть этого равенства, послѣ подстановки значений X', Y', Z', L', M', N' , указанныхъ равенствами (R') и (G') п. 14-го, оказывается равной $LX + MY + NZ$; она представляетъ собою, следовательно, постоянную величину. Такъ какъ главный векторъ R' также есть постоянная величина, то

$$G' \cos \widehat{R'G'} = \text{const.} = G \cos \widehat{RG},$$

что и требовалось доказать.

Инварианты. — Такимъ образомъ, количества

$$X^2 + Y^2 + Z^2, \quad LX + MY + NZ$$

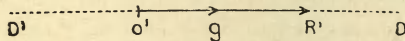
сохраняють неизмѣнныя значенія, каковы бы ни были начало и направленія прямоугольныхъ координатныхъ осей; эти количества можно называть инвариантами системы векторовъ.

Первый изъ этихъ инвариантовъ $X^2 + Y^2 + Z^2$ есть квадратъ главнаго вектора, второй же $LX + MY + NZ$ представляетъ собою геометрическое произведение главнаго вектора на главный моментъ относительно произвольной точки пространства.

Центральная ось. — Предполагая, что главный векторъ отличенъ отъ нуля, мы можемъ всегда выбрать точку $O' (x', y', z')$ такимъ образомъ, чтобы главный моментъ $O'G'$ былъ направленъ по той же прямой, что и главный векторъ $O'R'$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы величины L', M', N' были пропорціональны величинамъ X', Y', Z' :

$$\frac{L - (y'Z - z'Y)}{X} = \frac{M - (z'X - x'Z)}{Y} = \frac{N - (x'Y - y'X)}{Z}. \quad (8)$$

Эти уравненія, линейныя относительно координатъ x', y', z' , даютъ для геометрическаго мѣста точекъ O' прямую $D'D$, параллельную направленію главнаго вектора и называемую центральной осью (фиг. 14). Въ любой точкѣ O' этой оси главный векторъ и



Фиг. 14.

главный моментъ направлены вдоль оси въ одну и ту же сторону или въ противоположныя стороны — соответственно положительному

или отрицательному значенію количества $LX + MY + NZ$. Главный моментъ $O'g$ имѣетъ при этомъ наименьшее возможное значеніе, потому что онъ совпадаетъ со своей проекціей на главный векторъ.

Въ частномъ случаѣ, когда главный векторъ R отличенъ отъ нуля, а инвариантъ

$$LX + MY + NZ$$

равенъ нулю, проекція главнаго момента около любой точки на главный векторъ равна нулю, и наименьшее возможное значеніе $O'g$ главнаго момента есть нуль.

Замѣчаніе. Умноживъ члены отношеній (8) соотвѣтственно на X , Y , Z и взявъ отношеніе суммы всѣхъ предыдущихъ членовъ къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, мы найдемъ, что

$$\frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{G \cos \widehat{RG}}{R} \quad (9)$$

есть общее значеніе этихъ равныхъ отношеній; оно обращается въ нуль, если наименьшее возможное значеніе главнаго момента равно нулю.

Случай, когда главный векторъ равенъ нулю. — Когда главный векторъ равенъ нулю, то проекціи L' , M' , N' , какъ показываютъ формулы, равны соотвѣтственно L , M , N : главный моментъ тогда одинаковъ для всѣхъ точекъ пространства. Въ этомъ случаѣ разсужденія, которыя приводятъ къ понятію о центральной оси, теряютъ смыслъ.

16. Эквивалентныя системы приложенныхъ векторовъ. — Двѣ системы приложенныхъ векторовъ называются эквивалентными, если ихъ главные векторы и главные моменты около нѣкоторой точки соотвѣтственно равны между собой. Ихъ главные моменты равны, слѣдовательно, около всякой другой точки; въ частности, такія двѣ системы имѣютъ одну и ту же центральную ось и одинаковое наименьшее значеніе главнаго момента. Напримѣръ, система сходящихся векторовъ эквивалентна своему результирующему вектору ⁴⁾.

Пусть будутъ (S) и (S_0) двѣ системы векторовъ; X , Y , Z , L , M , N — проекціи на три оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента системы (S) около начала O , а X_0 , Y_0 , Z_0 , L_0 , M_0 , N_0 —

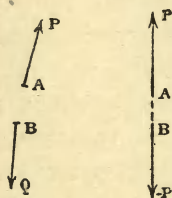
аналогичныя количества для системы (S_0) . Условія эквивалентности двухъ системъ выразятся такъ:

$$X = X_0, \quad Y = Y_0, \quad Z = Z_0, \quad L = L_0, \quad M = M_0, \quad N = N_0.$$

Примѣры: 1° Система приложенныхъ векторовъ, эквивалентная нулю. — Система (S) эквивалентна нулю, если ея главный векторъ и главный моментъ около нѣкоторой точки равны нулю. Эти величины равны въ такомъ случаѣ нулю для любой точки въ пространствѣ. Это выражается шестью равенствами:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Возьмемъ, на примѣръ, систему двухъ равныхъ и прямо-противоположныхъ векторовъ, т. е. систему, состоящую изъ двухъ векторовъ P и $-P$, которые равны, но направлены въ противоположныя стороны по прямой AB , соединяющей ихъ точки приложениа (фиг. 15); эта система, очевидно, эквивалентна нулю. Обратно,

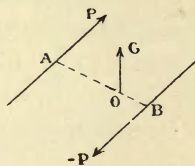


Фиг. 15.

если система двухъ векторовъ P и Q эквивалентна нулю, то эти векторы равны и прямопротивоположны. Дѣйствительно, такъ какъ главный векторъ долженъ быть равенъ нулю, то векторы P и Q равны и противоположно направлены. Такъ какъ главный моментъ долженъ быть равенъ нулю около любой точки, то возьмемъ моментъ около точки A вектора P . Моментъ вектора P около точки A равенъ нулю; главный моментъ сводится, слѣдовательно, къ моменту вектора Q , а такъ какъ этотъ моментъ долженъ быть равенъ нулю, то направленіе вектора Q проходитъ черезъ точку A , чѣмъ и доказывается наше предположеніе.

Въ статикѣ мы дадимъ болѣе важныя примѣры системъ векторовъ, эквивалентныхъ нулю.

2° Пара. — Парой называютъ, по Пуансо (Poinso), совокупность двухъ векторовъ P , — P , которые равны, параллельны и направлены въ противоположныя стороны. Разстояніе AB (фиг. 16) между



Фиг. 16.

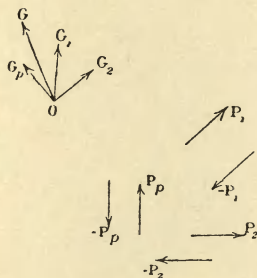
двумя векторами называется плечомъ пары; моментъ пары есть произведение $\overline{AB} \cdot P$ изъ плеча пары на одинъ изъ векторовъ. Когда моментъ равенъ нулю, то пара эквивалентна нулю; дѣйствительно, въ этомъ случаѣ либо оба вектора суть нули, либо же $AB = 0$, и тогда два вектора равны и прямо противоположны.

Такъ какъ пара представляетъ собой систему векторовъ, главный векторъ которой есть нуль, то главный моментъ пары для всѣхъ точекъ пространства имѣетъ постоянную величину и постоянное направленіе и обращенъ въ одну и ту же сторону. Этотъ главный моментъ называется осью пары. Ось пары представляетъ собой, слѣдовательно, векторъ опредѣленной величины и опредѣленнаго направленія, обращенный въ опредѣленную сторону, но точка приложенія его можетъ быть произвольно выбрана въ пространствѣ; онъ есть, слѣдовательно, свободный векторъ. Чтобы опредѣлить этотъ векторъ, найдемъ главный моментъ около принадлежащей плечу AB точки O , расположенной между точками A и B ; моменты двухъ векторовъ P и $-P$ направлены перпендикулярно къ плоскости пары и обращены въ одну и ту же сторону, потому что оба вектора P и $-P$ имѣютъ одно и то же направленіе вращенія вокругъ точки O ; главный моментъ OG , или ось пары, перпендикуляренъ, слѣдовательно, къ плоскости пары и равенъ $P \cdot \overline{OA} + P \cdot \overline{OB}$, или $P \cdot \overline{AB}$, т. е. моменту пары.

Сообразно съ этимъ, двѣ пары, имѣющія одну и ту же ось, эквивалентны, потому что обѣ онѣ имѣютъ главный векторъ, равный нулю, и одинаковые главные моменты.

3° Произвольное число паръ. — Система изъ произвольнаго числа паръ всегда эквивалентна одной парѣ, ось которой есть геометрическая сумма осей составляющихъ паръ.

Дѣйствительно, p паръ $P_1, -P_1; P_2, -P_2; \dots; P_n, -P_n$ составляютъ систему векторовъ, главный векторъ которой равенъ нулю. Поэтому главный моментъ этой системы одинъ и тотъ же около всѣхъ точекъ пространства (фиг. 17).



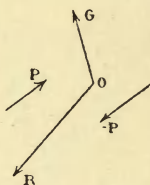
Фиг. 17.

Чтобы получить этотъ главный моментъ OG около точки O , мы можемъ поступить слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ сперва главный моментъ OG_1 векторовъ P_1 и $-P_1$, равный оси первой пары, затѣмъ главный моментъ OG_2 векторовъ P_2 и $-P_2$, равный оси второй пары, и такъ далѣе до главнаго момента OG_p , который равенъ оси послѣдней пары; затѣмъ мы складываемъ геометрически составляющіе моменты $OG_1, OG_2, \dots, OG_p$ и пусть OG будетъ ихъ геометрическая сумма. Теперь рассмотримъ пару съ осью OG , равной главному моменту системы всѣхъ паръ; эта единственная пара эквивалентна системѣ данныхъ паръ, потому что, подобно этой системѣ, она имѣетъ главный векторъ нуль и главный моментъ, равный OG . Если $OG = 0$, то полученная единственная пара, равно какъ и предложенная система, эквивалентна нулю.

17. Эквивалентность любой системы одному вектору и одной парѣ. — Система приложенныхъ векторовъ эквивалентна одному вектору, который равенъ главному вектору и приложенъ въ произвольной точкѣ, и одной парѣ, ось которой есть главный моментъ системы около этой точки. Дѣйствительно, пусть будетъ OR главный векторъ и OG главный мо-

ментъ системы около произвольной точки O . Новая система, состоящая изъ вектора R и пары $(P, -P)$ съ осью OG эквивалентна данной системѣ, потому что обѣ системы имѣютъ одинаковый главный векторъ OR и одинаковый главный моментъ около точки O (фиг. 18).

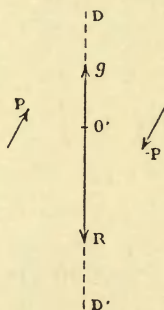
Такъ какъ точка O выбирается произвольно, то векторъ и пара, эквивалентные данной системѣ, могутъ быть опредѣлены безчислен-



Фиг. 18.

нымъ множествомъ способовъ. Когда точка O уже выбрана, то пара $(P, -P)$ все еще не будетъ вполне опредѣленной, потому что за такую пару можно принять любую изъ безчисленнаго множества паръ, для которыхъ OG служить осью.

Если возьмемъ точку O на центральной оси DD' въ O' , то главный векторъ $O'R$ и главный моментъ $O'g$ будутъ направлены по центральной оси; въ этомъ случаѣ плоскость пары $(P, -P)$



Фиг. 19.

перпендикулярна къ направлению главного вектора R и ось пары есть minimum (фиг. 19).

18. Эквивалентность системы двумъ векторамъ. —

Система приложенныхъ векторовъ эквивалентна системѣ двухъ векторовъ, изъ которыхъ одинъ приложенъ въ произвольно выбранной точкѣ. Возьмемъ систему векторовъ S и произвольную точку O . Мы знаемъ (п. 17), что система S эквивалентна системѣ, которая состоитъ изъ вектора R , приложеннаго въ точкѣ O , и пары G . Мы можемъ разсматривать пару G , какъ состоящую изъ двухъ векторовъ $(P, -P)$, изъ коихъ первый приложенъ въ точкѣ O . Если мы замѣнимъ векторы R и P ихъ геометрической суммой Q , то мы получимъ систему, эквивалентную системѣ S и состоящую изъ двухъ векторовъ Q и $-P$; векторъ Q приложенъ въ точкѣ O .

Если главный моментъ OG равенъ нулю, то получится одинъ векторъ; если же главный моментъ перпендикуляренъ къ главному вектору OR , то получится два вектора, лежащіе въ одной плоскости.

Замѣчаніе. — Такое приведеніе системы можетъ быть выполнено безчисленнымъ множествомъ способовъ; когда точка O будетъ выбрана, достаточно измѣнять векторы, составляющіе пару G .

19. Частные случаи эквивалентности. — Въ частности мо-

жетъ случиться, что система приложенныхъ векторовъ, не эквивалентная нулю, эквивалентна одной парѣ или одному вектору.

Система эквивалентна одной парѣ, если главный векторъ равенъ нулю.

Для того, чтобы система была эквивалентна одному вектору, необходимо и достаточно, чтобы главный векторъ былъ отличенъ отъ нуля, и чтобы наименьшее возможное значеніе g главного момента было равно нулю, т. е. чтобы главный моментъ около любой точки былъ перпендикуляренъ къ направленію главнаго вектора. Дѣйствительно, въ случаѣ системы, состоящей изъ одного вектора, центральная ось совпадаетъ съ этимъ векторомъ, и наименьшее значеніе момента системы есть нуль; обратно, если наименьшее значеніе главного момента системы равно нулю, то эта система эквивалентна одному вектору, направленному по центральной оси, такъ какъ та пара съ наименьшею осью, которую мы должны присоединить въ общемъ случаѣ, здѣсь обращается въ нуль.

20. Заключение. — Резюмируя изложенное, мы получаемъ слѣдующую таблицу:

$$\begin{array}{l}
 LX + MY + NZ \approx 0. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Система эквивалентна двумъ векторамъ, не лежащимъ въ} \\ \text{одной плоскости; она эквивалентна также вектору, направленному} \\ \text{по центральной оси.} \end{array} \right. \\
 \\
 LX + MY + NZ = 0. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Система эквивалентна двумъ векторамъ, лежащимъ въ} \\ \text{одной плоскости.} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ X^2 + Y^2 + Z^2 > 0. \\ 2^\circ X = Y = Z = 0, \\ 3^\circ X = Y = Z = 0, \\ \quad L = M = N = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Система эквивалентна} \\ \text{на одному вектору, направленному по} \\ \text{центральной оси.} \\ \text{Система эквивалентна} \\ \text{на одной парѣ.} \\ \text{Система эквивалентна} \\ \text{на нулю.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

21. Приложение общихъ теоремъ къ случаю параллельныхъ приложенныхъ векторовъ. — Если всѣ векторы системы параллельны, то эта система эквивалентна или одному вектору, или парѣ, или нулю. Дѣйствительно, такъ какъ всѣ составляющіе моменты около какой-либо точки направлены перпендикулярно къ общему направленію векторовъ, то главный моментъ перпендикуляренъ къ этому направленію, если только онъ не нуль; главный векторъ параллеленъ этому направленію, если онъ не равенъ нулю. Слѣдовательно, инвариантъ $LX + MY + NZ$ равенъ нулю.

Пусть α, β, γ будутъ направляющіе косинусы полупрямой, параллельной общему направленію векторовъ. Назовемъ черезъ $P_1, P_2, \dots, P_n$ величины векторовъ, рассматриваемыхъ по направленію этой полупрямой, такъ что векторы, направленные въ одну съ ней сторону, будутъ положительными, а векторы, направленные въ противоположную сторону, будутъ отрицательными. Мы предполагаемъ, что система координатныхъ осей прямоугольная. Обозначая черезъ x_k, y_k, z_k координаты точки приложенія вектора P_k , черезъ X_k, Y_k, Z_k — его проекціи на координатныя оси и черезъ L_k, M_k, N_k — его моменты около этихъ осей, мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \alpha P_k, & Y_k &= \beta P_k, & Z_k &= \gamma P_k, \\
 L_k &= P_k (\gamma y_k - \beta z_k), & M_k &= P_k (\alpha z_k - \gamma x_k), & N_k &= P_k (\beta x_k - \alpha y_k).
 \end{aligned}$$

Положивъ

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P_k,$$

гдѣ знакъ суммы $\sum$ распространяется на всѣ векторы системы, мы

получимъ для проекцій главнаго вектора и главнаго момента слѣдующія выраженія :

$$\begin{aligned} X &= \alpha P, & Y &= \beta P, & Z &= \gamma P, \\ L &= \gamma \Sigma P_k y_k - \beta \Sigma P_k z_k, & M &= \alpha \Sigma P_k z_k - \gamma \Sigma P_k x_k, \\ N &= \beta \Sigma P_k x_k - \alpha \Sigma P_k y_k. \end{aligned}$$

Путемъ подстановокъ непосредственно убѣждаемся въ томъ, что

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Поэтому, если

$P \equiv 0,$	то система эквивалентна одному вектору;
$P = 0, L^2 + M^2 + N^2 > 0,$	„ „ одной парѣ;
$P = 0, L = M = N = 0,$	„ „ нулю.

Отсюда найдемъ, что условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы система была эквивалентна нулю, выражаются слѣдующими уравненіями:

$$\Sigma P_k = 0, \quad \frac{\Sigma P_k x_k}{\alpha} = \frac{\Sigma P_k y_k}{\beta} = \frac{\Sigma P_k z_k}{\gamma}.$$

Центральная ось. Результирующій векторъ. — Предположимъ, что $P \equiv 0$; въ этомъ случаѣ система эквивалентна одному вектору, имѣющему алгебраическую величину P и проекціи $\alpha P, \beta P, \gamma P$; этотъ векторъ направленъ по центральной оси; для краткости мы будемъ называть его результирующимъ векторомъ системы.

Уравненія центральной оси D будутъ теперь

$$yZ - zY - L = 0, \quad zX - xZ - M = 0, \quad xY - yX - N = 0,$$

потому что общее значеніе трехъ равныхъ отношеній, изъ которыхъ составляются уравненія этой оси, есть нуль (см. замѣчаніе п. 15). Подставивъ въ эти уравненія приведенныя выше выраженія для X, Y, Z, L, M, N , мы приведемъ ихъ къ слѣдующему виду:

$$\gamma (Py - \Sigma P_k y_k) - \beta (Pz - \Sigma P_k z_k) = 0, \quad \dots;$$

мы можемъ написать

$$\frac{Px - \Sigma P_k x_k}{\alpha} = \frac{Py - \Sigma P_k y_k}{\beta} = \frac{Pz - \Sigma P_k z_k}{\gamma},$$

или положивъ,

$$(C) \quad \xi = \frac{\sum P_k x_k}{\sum P_k}, \quad \eta = \frac{\sum P_k y_k}{\sum P_k}, \quad \zeta = \frac{\sum P_k z_k}{\sum P_k}.$$

мы получимъ:

$$(D) \quad \frac{x - \xi}{\alpha} = \frac{y - \eta}{\beta} = \frac{z - \zeta}{\gamma};$$

это суть уравненія прямой D , параллельной даннымъ векторамъ и проходящей черезъ точку C съ координатами ξ , η , ζ .

При перемѣщеніи векторовъ вдоль ихъ основаній прямая D не измѣняется, потому что величины X , Y , Z , L , M , N остаются неизмѣнными. Координаты точекъ приложенія x_k , y_k , z_k измѣняются; точка C (ξ , η , ζ) перемѣщается, но геометрическое мѣсто ея есть центральная ось D данныхъ параллельныхъ приложенныхъ векторовъ, къ которой приложенъ результирующий векторъ.

IV. — СВЯЗАННЫЕ ВЕКТОРЫ; ШЕСТЬ КООРДИНАТЪ СВЯЗАННАГО ВЕКТОРА; ЦЕНТРЪ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ СВЯЗАННЫХЪ ВЕКТОРОВЪ; ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПРОИЗВОДНЫЯ.

22. Шестъ координатъ связаннаго вектора. — Векторъ, приложенный въ опредѣленной точкѣ пространства, мы назвали векторомъ, приложеннымъ въ точкѣ или связаннымъ (§ 2).

Напримѣръ, главный моментъ $\overrightarrow{AG}$ около точки A данной системы приложенныхъ векторовъ есть векторъ, связанный съ точкой A .

Для аналитическаго опредѣленія вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, связаннаго съ точкой A_1 , нужно задать три координаты x_1 , y_1 , z_1 точки A_1 и три проекціи вектора X_1 , Y_1 , Z_1 , т. е. всего шесть независимыхъ чиселъ, представляющихъ собой координаты связаннаго вектора.

23. Центръ системы параллельныхъ связанныхъ векторовъ. Моменты относительно плоскости. — Мы видѣли (п. 21), что система параллельныхъ приложенныхъ векторовъ геометрическая сумма которыхъ не есть нуль, эквивалентна одному приложенному вектору, такъ называемому результирующему вектору системы, лежащему на ея центральной оси D .

Назовемъ попрежнему черезъ α , β , γ направляющіе косинусы оси, параллельной векторамъ; пусть P_1 , P_2 , ..., P_n будутъ

алгебраическія величины этихъ векторовъ, которые считаются положительными, если они обращены въ ту же сторону, что и полупрямая съ направляющими косинусами α, β, γ , и пусть $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ будутъ координаты точекъ приложенія этихъ векторовъ. Проекціи X_k, Y_k, Z_k вектора P_k равны $\alpha P_k, \beta P_k, \gamma P_k$. Мы показали (п. 21), что результирующій векторъ этихъ приложенныхъ векторовъ параллеленъ имъ; его алгебраическая величина есть

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \Sigma P_k,$$

его проекціи X, Y, Z равны соответственно $\alpha P, \beta P, \gamma P$, а его основаніемъ служитъ центральная ось D , имѣющая уравненія

$$(D) \quad \frac{x - \xi}{\alpha} = \frac{y - \eta}{\beta} = \frac{z - \zeta}{\gamma},$$

гдѣ

$$(C) \quad \xi = \frac{\Sigma P_k x_k}{\Sigma P_k}, \quad \eta = \frac{\Sigma P_k y_k}{\Sigma P_k}, \quad \zeta = \frac{\Sigma P_k z_k}{\Sigma P_k}.$$

Предположимъ теперь, что векторы P_k связаны соответственно съ ихъ точками приложенія x_k, y_k, z_k , при чемъ послѣднія считаются опредѣленными и уже не могутъ перемѣщаться по основаніямъ векторовъ: тогда точка C , представленная уравненіями (C), является вполне опредѣленной; эта точка называется центромъ системы данныхъ параллельныхъ векторовъ, связанныхъ съ ихъ точками приложенія. Условимся перемѣщать результирующій векторъ P вдоль оси D , пока точка приложенія его не совпадетъ съ точкой C , такъ что онъ сдѣлается векторомъ, связаннымъ съ точкой C . Этотъ особенный векторъ, связанный съ точкой C , мы назовемъ результирующимъ векторомъ системы параллельныхъ связанныхъ векторовъ.

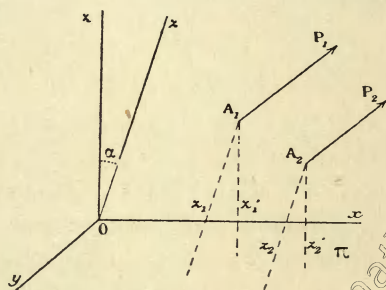
Итакъ, если параллельные связанные векторы имѣютъ геометрическую сумму, отличную отъ нуля, то ихъ результирующій векторъ геометрически равенъ этой суммѣ и связанъ съ центромъ системы данныхъ параллельныхъ векторовъ. Формулы (C), которыя даютъ координаты ξ, η, ζ центра C параллельныхъ связанныхъ векторовъ, показываютъ, что центръ системы параллельныхъ связанныхъ векторовъ не зависитъ отъ косинусовъ α, β, γ , т. е. отъ общаго направленія векторовъ; онъ зависитъ исключительно отъ ихъ точекъ приложенія (x_k, y_k, z_k) и отношеній ихъ величинъ $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Что точка C зависитъ единственно отъ отношеній величинъ векторовъ, вытекаетъ изъ того, что координаты ξ, η, ζ суть однородныя выраженія нулевого измѣренія относительно величинъ $P_1, P_2, \dots, P_n$; они, слѣдовательно, остаются безъ измѣненія, если величины $P_1, P_2, \dots, P_n$ замѣнимъ черезъ $\lambda P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n$, каково бы ни было число λ . Полученный нами результатъ мы можемъ также выразить въ слѣдующей формѣ: если мы будемъ мѣнять общее направленіе параллельныхъ векторовъ, связанныхъ съ ихъ точками приложенія, и будемъ замѣнять величины этихъ векторовъ пропорціональными имъ величинами, то ихъ результирующій векторъ, параллельный имъ, будетъ измѣняться въ такомъ же отношеніи, оставаясь связаннымъ съ центромъ системы параллельныхъ векторовъ.

Моменты параллельныхъ связанныхъ векторовъ относительно плоскости. — Формуламъ (C), дающимъ координаты центра C параллельныхъ векторовъ, мы можемъ дать простое геометрическое толкованіе, если введемъ понятіе о моментахъ относительно плоскости.

Разсмотримъ параллельные векторы, приложенные къ опредѣленнымъ точкамъ $A_1, A_2, \dots$. Назовемъ попрежнему черезъ $P_1, P_2, \dots$ алгебраическія величины этихъ векторовъ, т. е. величины, взятые со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, направлены ли векторы въ ту же сторону, какъ и выбранная нами положительная полупрямая, или въ противоположную.

Если даны плоскость Π , которую мы всегда можемъ принять за плоскость xOy , и ось Oz (фиг. 20) произвольнаго направленія,



Фиг. 20.

то моментомъ каждого изъ связанныхъ параллельныхъ векторовъ относительно этой плоскости Π называютъ произ-

ведение $P_k z_k$ изъ алгебраической величины P_k этого вектора на координату z_k его точки приложенія.

Опредѣленный такимъ образомъ моментъ есть положительное количество, или отрицательное, или нуль, и величина его зависитъ отъ точки приложенія вектора, такъ что при перемѣщеніи вектора вдоль основанія этотъ моментъ измѣнялся бы; поэтому данное нами опредѣленіе примѣнимо исключительно къ связаннымъ векторамъ. Изъ этого опредѣленія вытекаетъ слѣдующее основное свойство.

Если параллельные связанные векторы имѣютъ геометрическую сумму, отличную отъ нуля, то моментъ ихъ результирующаго вектора относительно плоскости равенъ алгебраической суммѣ моментовъ составляющихъ при томъ условіи, чтобы въ качествѣ точки приложенія результирующаго вектора былъ взятъ центръ параллельныхъ векторовъ.

Для доказательства предположимъ сперва, что ось Oz перпендикулярна къ плоскости Π ; координата z центра параллельныхъ векторовъ дается уравненіемъ

$$P\zeta = \sum P_k z_k,$$

гдѣ $P = \sum P$; это уравненіе и выражаетъ какъ разъ теорему, которую мы желаемъ доказать.

Если же ось Oz не перпендикулярна къ плоскости Π , то мы возьмемъ вспомогательную ось Oz' , перпендикулярную къ этой плоскости и образующую съ осью Oz уголъ α . Пусть $z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \zeta'$ будутъ координаты z точекъ приложенія, отсчитываемыя параллельно этой новой оси, т. е. перпендикулярно къ нашей плоскости; по предыдущему

$$P\zeta' = \sum P_k z'_k,$$

при чемъ координаты z' и z , очевидно, связаны соотношеніями

$$z'_1 = z_1 \cos \alpha, \quad z'_2 = z_2 \cos \alpha, \quad \dots, \quad \zeta' = \zeta \cos \alpha;$$

Подставивъ эти величины въ предыдущее равенство, мы получимъ соотношеніе, которое требовалось доказать:

$$P\zeta = \sum P_k z_k.$$

Такимъ образомъ, теорема о моментахъ доказана въ общемъ видѣ.

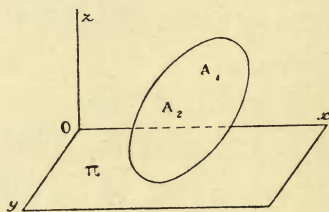
Примѣняя ее послѣдовательно къ тремъ координатнымъ плоскостямъ косоугольной системы, мы получимъ для координатъ ξ, η, ζ

центра параллельныхъ векторовъ при косоугольныхъ осяхъ такія же самыя формулы, какъ и въ случаѣ прямоугольныхъ осей.

Замѣчаніе I. — Теорема о моментахъ относительно плоскости можетъ примѣняться лишь въ томъ случаѣ, если $\Sigma P_k \geq 0$.

Когда $\Sigma P_k = 0$, то векторы, разсматриваемые, какъ приложенные, эквивалентны парѣ или нулю. Даже въ этомъ послѣднемъ случаѣ теорема не можетъ быть примѣнена; дѣйствительно, такъ какъ результирующий векторъ здѣсь равенъ нулю, то центръ параллельныхъ векторовъ бесконечно удаленъ. Исключеніе составляетъ только тотъ еще болѣе частный случай, когда четыре суммы ΣP_k , $\Sigma P_k x_k$, $\Sigma P_k y_k$, $\Sigma P_k z_k$ равны нулю; координаты ξ , η , ζ становятся тогда неопредѣленными. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что параллельные связанные векторы находятся въ астатическомъ равновѣсіи.

Замѣчаніе II. — Въ частномъ случаѣ, когда всѣ векторы направлены въ одну и ту же сторону, центръ параллельныхъ векторовъ находится внутри всякой выпуклой поверхности, охватывающей всѣ точки приложенія составляющихъ. Для доказательства будемъ считать, что данные векторы $P_1, P_2, \dots, P_n$, направлены въ положительную сторону; плоскостью π намъ будетъ служить касательная плоскость Π къ разсматриваемой поверхности, а осью Oz — перпендикуляръ къ этой плоскости, лежащій съ той же стороны ея, что и поверхность (фиг. 21). Въ такомъ случаѣ координаты z всѣхъ



Фиг. 21.

точекъ приложенія будутъ положительными, и уравненіе

$$\zeta = \frac{\Sigma P_k z_k}{\Sigma P_k}$$

показываетъ, что координата ζ тоже будетъ положительной. Такъ какъ центръ параллельныхъ векторовъ относительно любой касатель-

ной плоскости находится съ той же стороны, что и поверхность, то онъ лежитъ внутри послѣдней.

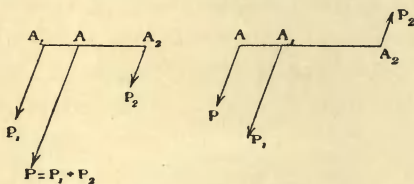
Примѣръ. — Въ видѣ примѣра легко вывести извѣстныя элементарныя свойства системы двухъ параллельныхъ векторовъ, которые приложены въ двухъ точкахъ A_1 и A_2 и имѣютъ соотвѣтственно алгебраическія величины P_1 и P_2 . Если сумма $P_1 + P_2$ отлична отъ нуля, то система обладаетъ результирующимъ векторомъ, т. е. эквивалентна одному вектору, который имѣетъ алгебраическую величину

$$P = P_1 + P_2$$

и приложенъ въ точкѣ A (центрѣ двухъ параллельныхъ векторовъ) (фиг. 22), опредѣляемой соотношеніемъ

$$\frac{AA_1}{AA_2} = -\frac{P_2}{P_1}. \quad (10)$$

Здѣсь отношеніе двухъ отрѣзковъ $\overline{AA_1}$ и $\overline{AA_2}$, согласно принятымъ въ геометріи условіямъ, считается положительнымъ или отри-



Фиг. 22.

цательнымъ, смотря по тому, направлены ли эти два отрѣзка въ одну и ту же сторону или въ противоположныя стороны.

Мы можемъ убѣдиться въ этомъ непосредственно, взявъ прямую A_1A_2 за ось x ; формулы для координатъ центра ξ , η , ζ показываютъ, что η и ζ суть нули; точка A лежитъ, слѣдовательно, на прямой A_1A_2 ; если возьмемъ въ этой точкѣ начало, то координата ξ будетъ равна нулю, т. е.

$$P_1x_1 + P_2x_2 = 0,$$

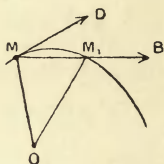
а это есть не что иное, какъ соотношеніе (10).

Частный случай. — Если $P_1 + P_2 = 0$ и точки A_1 и A_2 не совпадаютъ, то центръ двухъ параллельныхъ векторовъ болѣе не существуетъ; онъ безконечно удаленъ какъ въ томъ случаѣ,

когда два данные вектора составляютъ пару, такъ и въ томъ случаѣ, когда они равны и прямопротивоположны.

Если $P_1 + P_2 = 0$ и точка A_1 совпадаетъ съ точкой A_2 , то центръ двухъ параллельныхъ векторовъ будетъ неопредѣленнымъ: векторы находятся въ аstaticескомъ равновѣсіи.

24. Геометрическія производныя. — Разсмотримъ (фиг. 23) векторъ OM , связанный съ неподвижнымъ началомъ O . Предполо-



Фиг. 23.

жимъ, что этотъ векторъ зависитъ отъ переменнѣй u такимъ образомъ, что съ непрерывнымъ измѣненіемъ u конецъ вектора M перемѣщается непрерывнымъ образомъ. Мы можемъ въ такомъ случаѣ сказать, что этотъ векторъ есть непрерывная функція отъ u . Пусть OM и OM_1 будутъ два вектора, соотвѣтствующіе значеніямъ u и $u + \Delta u$ переменнѣй; приращеніе Δu мы будемъ считать положительнымъ. Соотвѣтствующее геометрическое приращеніе вектора есть геометрическая разность $(OM_1) - (OM)$, т. е. векторъ, равный MM_1 . Отношеніе этого приращенія къ приращенію переменнѣй есть векторъ

$$MB = \frac{MM_1}{\Delta u},$$

который имѣетъ такое же направленіе и обращенъ въ ту же сторону, какъ и векторъ MM_1 .

Когда приращеніе Δu стремится къ нулю, этотъ векторъ стремится къ предѣльному вектору MD , касательному къ кривой, описываемой концомъ вектора M ; этотъ предѣльный векторъ MD называется геометрической производной вектора OM по переменнѣй u ⁵⁾.

Аналитическое опредѣленіе геометрической производной вектора. — Возьмемъ три оси Ox, Oy, Oz съ началомъ въ точкѣ O .

Координаты x, y, z точки M служат проекциями вектора OM на эти оси, при чемъ проектирование на каждую ось производится параллельно плоскости двухъ другихъ осей. Количества x, y, z суть функции отъ переменнѣй u . Когда u получаетъ приращеніе Δu , точка M переходитъ въ M_1 ; координаты x, y, z получаютъ приращенія $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Векторъ MM_1 имѣетъ проекціи $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, и векторъ MB , который равенъ отношенію вектора MM_1 къ Δu , имѣетъ, слѣдовательно, проекціи

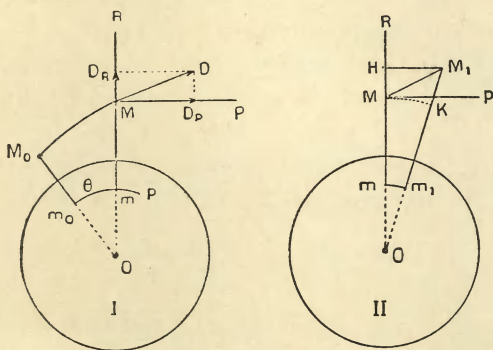
$$\frac{\Delta x}{\Delta u}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta u}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta u}.$$

Предполагая, что приращение Δu стремится к нулю, мы легко найдем, что проекциями геометрической производной вектора служат производные

$$\frac{dx}{du}, \quad \frac{dy}{du}, \quad \frac{dz}{du}$$

проекцій первонаочального вектора $\vec{b}$).

25. Проекції производной вектора на самый векторъ и на перпендикулярное къ нему направленіе. — Изъ точки O , какъ центра, опишемъ (фиг. 24) сферу радіусомъ, равнымъ единицѣ



Фиг. 24.

длины. Пусть m будет точка, въ которой векторъ OM пересѣкаетъ сферу. При $u = u_0$ векторъ занимаетъ положеніе OM_0 , а точка m положеніе m_0 . Когда переменная u измѣняется, векторъ также измѣняется, при чемъ точка M описываетъ нѣкоторую кри-

вую въ пространствѣ, а точка m — сферическую кривую. Обозначимъ черезъ r длину OM вектора и черезъ θ длину дуги $m_0 m$ ⁶⁾. Векторъ OM описываетъ коническую поверхность; поэтому его геометрическая производная MD лежитъ въ плоскости, которая касается конической поверхности вдоль образующей OmM . Найдемъ проекціи D_R и D_P вектора MD на продолженіе MR вектора OM и на перпендикуляръ MP къ вектору OM , проведенный въ плоскости, которая касается конической поверхности вдоль прямой OM , при чемъ положительнымъ направлениемъ перпендикуляра MP будетъ считаться то, въ которомъ векторъ OM перемѣщается съ возрастаніемъ дуги θ (фиг. 24, I); эта полупрямая MP параллельна касательной mp къ сферической кривой, представляющей собой геометрическое мѣсто точки m .

Чтобы не повторять каждый разъ одного и того же разсужденія относительно перехода къ предѣлу, мы будемъ опираться на принципы метода безконечно малыхъ. Пусть OM и OM_1 будутъ два положенія вектора, соотвѣтствующія двумъ безконечно близкимъ значеніямъ перемѣнной u и $u + du$ (фиг. 24, II), и пусть m и m_1 будутъ соотвѣтствующія точки сферической кривой; дуга mm_1 равна $d\theta$, и разстояніе OM_1 равно $r + dr$. Изъ центра O опишемъ на конической поверхности двѣ дуги сферическихъ кривыхъ M_1H и MK , между прямыми OM и OM_1 . Элементъ MM_1 служитъ діагональю безконечно малаго прямоугольника $HMKM_1$. Проекціями элемента MM_1 на оси MR и MP будутъ, слѣдовательно, $MH = dr$ и $MK = rd\theta$. Такъ какъ геометрическая производная MD равна частному отъ дѣленія элемента MM_1 на du , то проекціи ея на оси MR и MP равны соотвѣтственно частнымъ отъ дѣленія dr и $rd\theta$ на du . Мы имѣемъ, такимъ образомъ, формулы

$$D_R = \frac{dr}{du}, \quad D_P = r \frac{d\theta}{du}. \quad (11)$$

Мы можемъ сказать, что проекціей D_R измѣряется измѣненіе длины вектора, а проекціей D_P измѣряется угловое измѣненіе вектора.

При какомъ условіи геометрическая производная вектора направлена постоянно по самому вектору? — Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторъ имѣлъ постоянное направленіе. Дѣйствительно, для того, чтобы производная MD имѣла направленіе вектора OM , необходимо и достаточно, чтобы

проекція D_r была равна нулю, т. е., чтобы выполнялось равенство $r \frac{d\theta}{du} = 0$. Такъ какъ векторъ r не равенъ нулю, то необходимо и достаточно, чтобы было $\frac{d\theta}{du} = 0$ ($\theta = \text{const.}$). Точка m занимаетъ, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ неподвижное положеніе на сферической кривой m_0m , и векторъ OM имѣетъ неизмѣнное направленіе.

При какомъ условіи геометрическая производная вектора постоянно перпендикулярна къ самому вектору? — Для этого необходимо и достаточно, чтобы проекція D_R была нулемъ, $\frac{dr}{du} = 0$ ($r = \text{const.}$), т. е. чтобы перемѣнный векторъ имѣлъ постоянную длину.

V. — ПОЛЯРНЫЙ ВЕКТОРЪ; ОСЕВОЙ ВЕКТОРЪ.

26. Природа симметріи вектора. — Величины, представляемыя векторами, могутъ обладать симметріей двухъ родовъ; съ этой точки зрѣнія они дѣлятся на два класса: на полярные векторы и на осевые векторы.

Полярный векторъ. — Векторъ $\overrightarrow{A_1B_1}$ называется полярнымъ, если представляемая имъ физическая величина симметрична относительно всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ прямую A_1B_1 , но не относительно плоскости, перпендикулярной къ A_1B_1 . Напримѣръ, скорость, ускореніе представляются полярными векторами. Можно сказать, что симметрія полярнаго вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ такова же, какъ и параболоида вращенія вокругъ оси A_1B_1 ⁷⁾. Опредѣленіе полярнаго вектора не зависитъ ни отъ ориентировки осей, ни отъ выбора положительнаго направленія вращеній.

Осевой векторъ. — Векторъ A_1B_1 называется осевымъ, если представляемая имъ физическая величина симметрична не только относительно плоскостей, проходящихъ черезъ A_1B_1 , но также относительно плоскости, перпендикулярной къ A_1B_1 , такъ что симметрія физической величины, которая должна быть представлена векторомъ, такова же, какъ и цилиндра вращенія вокругъ A_1B_1 ⁸⁾.

Опредѣленіе осевого вектора зависитъ обыкновенно отъ условія относительно положительнаго направленія вращеній или напра-

вленія, приписываемаго нѣкоторымъ круговымъ движеніямъ. Напримѣръ, моментъ $\overrightarrow{BG_1}$ полярнаго приложеннаго вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ около точки B есть осевой векторъ; дѣйствительно, физическая величина, которая должна быть представлена векторомъ, характеризуется: 1° плоскостью, проходящей черезъ точку B и основаніе вектора A_1B_1 ; 2° площадью треугольника BA_1B_1 ; 3° стороной, въ которую обращенъ векторъ A_1B_1 . Эти элементы симметричны относительно плоскости BA_1B_1 . Векторъ BG_1 считается обращеннымъ въ ту или другую сторону относительно этой плоскости въ зависимости отъ условія о положительномъ направленіи вращеній вокругъ оси; поэтому векторъ BG_1 есть осевой векторъ. Представленіе момента векторомъ отличается, такимъ образомъ, нѣкоторымъ несовершенствомъ, потому что, благодаря нашему произвольному выбору положительнаго направленія вращеній, мы вводимъ диссимметрію, не существующую въ объектѣ, который мы желаемъ представить. Мы могли бы избѣжать этой диссимметріи, если бы мы, напримѣръ, условились представлять моментъ полярнаго вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ около точки B кругомъ, описаннымъ въ плоскости BA_1B_1 изъ центра B радіусомъ, который измѣряется тѣмъ же числомъ, какъ и моментъ, при чемъ стрѣлка на окружности указывала бы направленіе, въ которомъ точка, проходящая вдоль вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, вращается вокругъ точки B . Такой способъ представленія дѣлалъ бы очевиднымъ симметрію момента, но съ другихъ точекъ зрѣнія онъ былъ бы гораздо менѣе удобенъ, чѣмъ обычный способъ. Ось пары полярныхъ векторовъ также есть осевой векторъ.

Легко убѣдиться, что моментъ $\overrightarrow{B'G'}$ момента $\overrightarrow{BG_1}$, взятый около точки B' , есть полярный векторъ. Для этого достаточно показать, что векторъ $\overrightarrow{B'G'}$ не зависитъ отъ того, какое направленіе вращеній мы условились считать положительнымъ.

Эти соображенія имѣютъ важное значеніе въ физикѣ.



ГЛАВА II.

КИНЕМАТИКА.

I. — ПРЕДМЕТЪ КИНЕМАТИКИ.

27. Определенія. — Въ геометріи мы разсматриваемъ движенія независимо отъ понятія о времени. Такъ, напримѣръ, мы представляемъ себѣ фигуры, которыя перемѣщаются для наложенія на другія фигуры, или фигуры, которыя вращаются, образуя поверхности или объемы; но при этомъ мы не обращаемъ вниманія на время, въ теченіе котораго совершаются эти движенія.

Въ кинематику, кромѣ идеи движенія, вводятъ еще и идею времени. Можно сказать, что кинематика есть ученіе о движеніяхъ въ зависимости отъ времени.

Для вычисленія всѣхъ количествъ, входящихъ въ кинематику, достаточно выбрать двѣ основныя единицы — единицу длины и единицу времени.

Время. — Чтобы опредѣлить моментъ, въ который совершается извѣстное явленіе, мы относимъ этотъ моментъ къ нѣкоторому опредѣленному моменту, который называется начальнымъ, и задаемъ число, измѣряющее при помощи нѣкоторой единицы (напримѣръ, секунды средняго времени) промежутокъ времени, заключенный между начальнымъ моментомъ и разсматриваемымъ; предъ этимъ числомъ мы ставимъ знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, слѣдуетъ ли разсматриваемый моментъ послѣ начального или предшествуетъ ему. Такимъ образомъ, когда мы говоримъ о моментѣ t , то буква t обозначаетъ положительное или отрицательное число секундъ. Можно также сказать, что t есть дата разсматриваемаго момента относительно начального.

Неизмѣняемыя системы, или твердыя тѣла. — Геометрическія фигуры можно разсматривать, какъ состоящія изъ точекъ. Точно такъ же матеріальныя тѣла можно разсматривать, какъ состоя-

щія изъ большого числа частицъ, которыя настолько малы, что положеніе каждой изъ нихъ можетъ быть опредѣлено такъ же, какъ положеніе точки; эти частицы называются матеріальными точками.

Система геометрическихъ или матеріальныхъ точекъ называется неизмѣняемой системой, а также твердымъ тѣломъ, если взаимныя разстоянія этихъ точекъ не мѣняются; эти точки при такомъ условіи неподвижны однѣ относительно другихъ. Тѣла, которыя обычно называются твердыми, — камень, кусокъ желѣза или дерева — представляютъ собою почти неизмѣняемыя системы. Нѣкоторыя вполне опредѣленныя геометрическія фигуры тоже образуютъ неизмѣняемыя системы; таковы, напримѣръ, треугольникъ, стороны котораго имѣютъ опредѣленную длину, шаръ постояннаго радіуса, ортогональный трехгранный уголъ.

Измѣняемая или деформирующіяся системы. — Совокупность точекъ, не образующихъ неизмѣняемой системы, составляетъ деформирующуюся систему. Такова, напримѣръ, гибкая нить, пружина, масса воды или воздуха.

28. Относительность движенія. Реперы движенія [или система сравненія. — Реперами движенія или системой сравненія называется неизмѣняемая система, относительно которой мы изучаемъ движеніе. Когда мы говоримъ, что поѣздъ движется, что камень, предоставленный самому себѣ, падаетъ по вертикальной линіи, что солнце всходитъ или заходитъ, то мы считаемъ системой сравненія землю. Въ астрономіи и въ небесной механикѣ движенія земли, планетъ, солнца изучаются по отношенію къ совокупности звѣздъ, которыя опредѣляются, какъ неподвижныя; въ этихъ движеніяхъ системой сравненія служить система неподвижныхъ звѣздъ.

29. Подраздѣленія кинематики. — Такъ какъ любое тѣло мы можемъ разсматривать, какъ совокупность точекъ, то въ кинематикѣ начинаютъ съ изученія движенія геометрической точки относительно выбранной системы сравненія. Изучивъ свойства, представляемыя движеніемъ точки, переходятъ къ движеніямъ произвольныхъ тѣлъ, разсматривая ихъ, какъ системы точекъ. Такимъ образомъ, кинематика вполне естественно дѣлится на кинематику точки и на кинематику системы; кинематика системы, въ свою очередь,

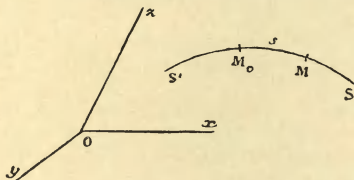
подраздѣляется на кинематику неизмѣняемыхъ или твердыхъ системъ и кинематику деформирующихся системъ.

II. — СКОРОСТЬ и УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ.

30. Движеніе точки. — Предположимъ, что точка движется относительно нѣкоторой системы сравненія. Эта точка называется движущимся объектомъ; геометрическое мѣсто положеній, которыя она послѣдовательно занимаетъ относительно системы сравненія, есть кривая, неизмѣнно связанная съ этой системой и называемая траекторіей точки.

Движеніе называется прямолинейнымъ, если траекторія есть прямая; оно называется круговымъ или эллиптическимъ, если траекторіей служить окружность или эллипсъ, и т. д.

31. Опредѣленіе движенія: 1° Внутреннее опредѣленіе. — Можно сперва геометрически опредѣлить траекторію $S'S$; затѣмъ принимаютъ на этой кривой неподвижную точку M_0 за начало дугъ (фиг. 25) и устанавливаютъ положительное направленіе M_0S . Положеніе M движущейся точки въ любой моментъ t опре-



Фиг. 25.

дѣляется алгебраической величиной s криволинейнаго отрезка M_0M ; отрезокъ s есть нѣкоторая функція времени:

$$s = f(t). \quad (1)$$

Это соотношеніе между величинами s и t называется уравненіемъ движенія на кривой.

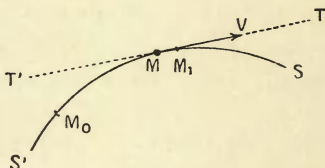
Такимъ именно способомъ можно опредѣлять положеніе поѣзда на линіи желѣзной дороги; путь представляетъ собою траекторію; расписаніе поѣздовъ даетъ въ километрахъ разстояніе поѣзда отъ станціи отправленія въ любой моментъ.

2° Опредѣленіе въ декартовыхъ координатахъ. — Возьмемъ три оси $Oxyz$, неподвижно связанныя съ системой сравненія (фиг. 25). Движеніе точки M можно опредѣлить, задавши выраженія ея координатъ x, y, z въ видѣ непрерывныхъ функцій времени:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t). \quad (2)$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій время t , мы получимъ уравненія траекторіи.

32. Векторъ-скорость. — Пусть M будетъ положеніе движущейся точки въ моментъ t , M_1 — ея положеніе въ послѣдующій, бесконечно близкій моментъ $t + dt$ (фиг. 26); за бесконечно



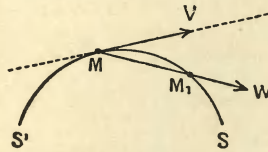
Фиг. 26.

малый промежутокъ времени dt точка прошла бесконечно малую дугу MM_1 въ направленіи MM_1 . Векторомъ-скоростью въ моментъ t называютъ векторъ MV , который приложенъ въ точкѣ M , имѣетъ направленіе элемента MM_1 (т. е. направленъ по касательной $T'MT$ къ траекторіи), обращенъ въ сторону MM_1 (т. е. въ сторону движенія) и имѣетъ длину MV , равную отношенію $\frac{\text{arc } MM_1}{dt}$, т. е. отношенію бесконечно малаго пути, пройденнаго въ теченіе времени dt , къ времени, въ теченіе котораго этотъ путь былъ пройденъ.

Векторъ-скорость есть полярный векторъ, связанный съ движущейся точкой.

33. Средняя скорость въ теченіе конечнаго промежутка времени. — Предположимъ, что въ моментъ t точка занимаетъ положеніе M , а въ послѣдующій моментъ $t + \Delta t$ положеніе M_1 ; Δt есть конечный промежутокъ времени. Отложимъ на хордѣ MM_1 въ сторону MM_1 векторъ MW (фиг. 27), равный отношенію $\frac{\text{хорда } MM_1}{\Delta t}$; этотъ векторъ есть средняя скорость точки при переходѣ отъ положенія M въ M_1 . Скорость MV въ точкѣ M есть предѣлъ

средней скорости MW , когда Δt стремится къ нулю. Дѣйствительно, векторъ MW въ предѣлѣ получаетъ то же направленіе и обращенъ въ ту же сторону, что и векторъ MV ; онъ получаетъ также и равную съ нимъ длину: такъ какъ отноше-



Фиг. 27.

ніе хорды MM_1 къ дугѣ MM_1 стремится къ единицѣ, когда точка M_1 стремится къ M , то отношеніе $\frac{\text{хорда } MM_1}{\Delta t}$ имѣетъ тотъ же предѣлъ, что и отношеніе $\frac{\text{дуга } MM_1}{\Delta t}$, а предѣлъ послѣдняго отношенія есть величина скорости въ точкѣ M .

34. Аналитическія выраженія скорости. — Двумъ даннымъ выше способамъ опредѣленія движенія соотвѣтствуютъ два способа опредѣленія вектора-скорости.

1° Если даны траекторія и уравненіе движенія $s = f(t)$, то проведемъ къ кривой въ точкѣ M (фиг. 26) касательную MT въ сторону положительныхъ дугъ, и условимся называть алгебраической величиной v скорости величину скорости MV , взятую со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, направленъ ли векторъ-скорость MV въ сторону MT или въ противоположную, или, что сводится къ тому же, смотря по тому, движется ли точка въ моментъ t въ сторону положительныхъ или отрицательныхъ дугъ. Покажемъ, что алгебраическая величина v скорости имѣетъ выраженіе

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t),$$

т. е. что она равна производной длины дуги s по времени t . Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$ds = \pm \text{arc } MM_1,$$

гдѣ нужно взять знакъ $+$ или $-$ въ зависимости отъ того, происходитъ ли перемѣщеніе MM_1 въ сторону положительныхъ дугъ или

отрицательныхъ. Слѣдовательно, согласно опредѣленію величины скорости, количества v и $\frac{ds}{dt}$ имѣютъ одну и ту же абсолютную величину; кромѣ того, эти два количества имѣютъ одинаковый знакъ; дѣйствительно, при перемѣщеніи точки въ сторону положительныхъ дугъ скорость v будетъ положительной, дуга s будетъ возрастать вмѣстѣ съ временемъ t , и, слѣдовательно, выражение $\frac{ds}{dt}$ также будетъ положительнымъ; если же точка перемѣщается въ сторону отрицательныхъ дугъ, то скорость v будетъ отрицательной, дуга s будетъ убывать съ возрастаніемъ t и, слѣдовательно, ея производная $\frac{ds}{dt}$ также будетъ отрицательной.

Единицы. — Въ зависимости отъ выбора единицъ длины и времени абсолютная величина скорости v выражаетъ число метровъ въ секунду или число километровъ въ часъ и т. д.

2° Векторъ-скорость въ декартовыхъ координатахъ. — Предположимъ, что координаты x , y , z движущейся точки M даны въ функціяхъ времени (фиг. 25); когда t получить приращеніе dt , точка пройдетъ элементъ MM_1 , проекціями котораго на оси служатъ dx , dy , dz ; такъ какъ векторъ-скорость MV направленъ въ ту же сторону, что и элементъ дуги MM_1 и равенъ отношенію $\frac{MM_1}{dt}$, то его проекціи равны соотвѣтственно проекціямъ дуги MM_1 , раздѣленнымъ на dt :

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Проекціи вектора-скорости на оси представляютъ собою производныя координатъ по времени.

Прямоугольныя оси; величина скорости. — Въ случаѣ прямоугольныхъ осей квадратъ вектора-скорости равенъ суммѣ квадратовъ его проекцій:

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}.$$

35. Векторъ-скорость, какъ геометрическая производная вектора. — Возьмемъ произвольную неподвижную точку O : со-

гласно изложенному, векторъ-скорость есть геометрическая производная по времени вектора OM , идущаго отъ точки O къ движущейся точкѣ M (п. 24).

36. Примѣры: 1° Равномѣрное криволинейное движеніе. — Когда траекторіей служить произвольная кривая, то движеніе точки называется равномѣрнымъ, если алгебраическая величина скорости

$$v = \frac{ds}{dt}$$

есть постоянная. Обозначимъ эту постоянную черезъ v_0 ; мы имѣемъ

$$\frac{ds}{dt} = v_0,$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$s = v_0 t + s_0,$$

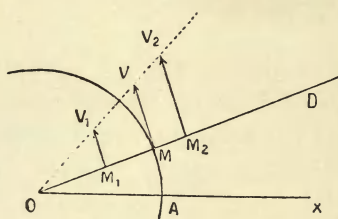
гдѣ s_0 обозначаетъ криволинейную абсциссу движущейся точки въ моментъ $t = 0$.

2° Прямолинейное движеніе. — Когда траекторіей служить прямая, векторъ-скорость сохраняетъ, очевидно, неизмѣнное направление. Обратно, если векторъ-скорость имѣетъ неизмѣнное направление, то траекторія представляетъ собой линію, касательная къ которой сохраняетъ неизмѣнное направление, т. е. траекторіей служить прямая.

3° Прямолинейное и равномѣрное движеніе. — Въ прямолинейномъ и равномѣрномъ движеніи скорость имѣетъ постоянную величину, постоянное направление и обращена всегда въ одну и ту же сторону; обратно, если скорость движущейся точки удовлетворяетъ этимъ условіямъ, то точка обладаетъ равномѣрнымъ прямолинейнымъ движеніемъ.

37. Угловая скорость; круговое движеніе. — Возьмемъ сначала въ неподвижной плоскости движущуюся прямую OD , вращаю-

щуюся вокруг одного изъ своихъ концовъ O (фиг. 28), который предполагается неподвижнымъ. Обозначимъ черезъ θ уголъ, состав-



Фиг. 28.

ляемый этой прямой въ моментъ t съ неподвижнымъ направлениемъ оси Ox въ плоскости. Этотъ уголъ θ есть нѣкоторая функція времени.

Угловой скоростью вращенія прямой въ моментъ t называется отношеніе

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

безконечно малаго приращенія $d\theta$ угла къ соответствующему безконечно малому приращенію времени dt . Эта угловая скорость будетъ положительной или отрицательной, смотря по тому возрастаетъ ли уголъ θ съ возрастаніемъ t или убываетъ.

Равномѣрное вращеніе. — Говорятъ, что прямая совершаетъ равномѣрное вращательное движеніе вокругъ точки O въ неподвижной плоскости, если угловая скорость ω прямой есть постоянная. Если ω_0 есть это постоянное значеніе, то

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0;$$

откуда, интегрируя, получимъ :

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0,$$

это есть уравненіе равномѣрнаго вращательнаго движенія прямой OD ; въ этомъ случаѣ уголъ θ измѣняется пропорціонально времени t .

Единицы. — Единицей времени обыкновенно служитъ секунда; этой единицей мы и будемъ постоянно пользоваться, исключая тѣ

случаи, когда противное будет оговорено. Единицей угловъ намъ будетъ служить принятый въ тригонометріи радіантъ⁹⁾. При этой системѣ прямой уголъ измѣряется числомъ $\frac{\pi}{2}$.

Уп ра ж н е н і е. — Прямая OD обладаетъ равномернымъ вращательнымъ движеніемъ, совершая n оборотовъ въ минуту; опредѣлить ея угловую скорость въ указанныхъ единицахъ.

За 60 секундъ прямая описываетъ уголъ, равный $n \cdot 2\pi$; ея угловая скорость, рассчитанная на секунду, равна, слѣдовательно,

$$\omega_0 = \frac{2n\pi}{60}.$$

Круговое движеніе. — Предположимъ, что точка M лежитъ на вращающейся прямой OD на постоянномъ разстояніи R отъ точки O (фиг. 28). Точка M обладаетъ, очевидно, круговымъ движеніемъ. Пусть A будетъ положеніе точки M , соотвѣтствующее углу $\theta = 0$; обозначимъ черезъ s дугу AM , которая считается положительной въ ту же сторону вращенія, что и уголъ θ . Мы имѣемъ

$$s = R\theta;$$

алгебраическая величина v скорости M равна, слѣдовательно,

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega,$$

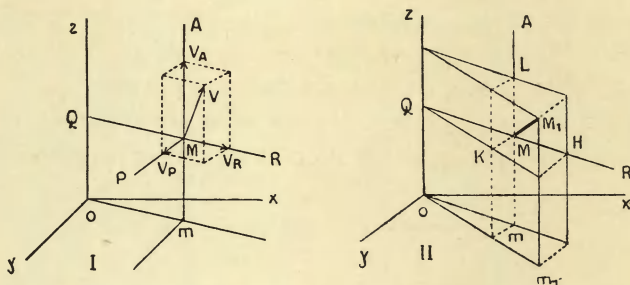
гдѣ ω есть угловая скорость въ моментъ t . Иногда эта скорость v называется линейной скоростью точки M для отличія отъ угловой скорости ω луча OM . Въ круговомъ движеніи линейная скорость равна, слѣдовательно, произведенію радіуса на угловую скорость.

Если возьмемъ на прямой OD нѣсколько точекъ $M, M_1, M_2, \dots$ на разстояніяхъ $R, R_1, R_2, \dots$ отъ точки O , то линейныя скорости $v, v_1, v_2, \dots$ этихъ точекъ будутъ пропорціональны соотвѣтственнымъ радіусамъ. Дѣйствительно, мы имѣемъ равенства

$$\frac{v}{R} = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \dots = \omega.$$

Геометрически концы векторовъ - скоростей этихъ точекъ лежатъ въ каждый моментъ на одной прямой съ точкой O (фиг. 28).

38. Скорость въ цилиндрическихъ, или полуполярныхъ координатахъ. — Возьмемъ сперва три прямоугольныя оси $Oxyz$ (фиг. 29). Чтобы опредѣлить положеніе точки M въ пространствѣ,



Фиг. 29.

задаютъ полярныя координаты $Om=r$, $xOm=\theta$ проекціи m точки M на плоскость xu и координату $z=mM$ точки M . Эти три числа r , θ , z называются цилиндрическими координатами или также полуполярными координатами точки M . Поверхности $r=\text{const.}$ представляютъ собой цилиндры вращенія вокругъ оси Oz ; поверхности $\theta=\text{const.}$ будутъ полуплоскостями, проходящими черезъ ось Oz ; наконецъ, поверхности $z=\text{const.}$ суть плоскости, параллельныя плоскости xOy .

Вообразимъ теперь движущуюся точку, занимающую въ моментъ t положеніе M , которому соответствуютъ координаты r , θ , z . Чтобы опредѣлить векторъ - скорость MV , найдемъ (фиг. 29, I): 1° его проекцію V_R на продолженіе MR перпендикуляра $QM=r$, опущеннаго изъ точки M на ось Oz ; 2° его проекцію V_P на перпендикуляръ MP къ плоскости zOM , который считается положительнымъ въ ту сторону, куда вращается эта плоскость съ возрастаніемъ угла θ ; 3° его проекцію V_A на ось Oz или на прямую MA , параллельную этой оси.

Пусть (фиг. 29, II) M_1 будетъ положеніе движущейся точки въ моментъ $t+dt$, гдѣ dt есть положительная бесконечно малая величина, и $r+dr$, $\theta+d\theta$, $z+dz$ координаты точки M_1 . Проведемъ двѣ цилиндрическія поверхности, имѣющія ось Oz и радіусы r , $r+dr$, двѣ плоскости zOM и zOM_1 , образующія съ плоскостью zOx со-

ответственно углы θ и $\theta + d\theta$, и, наконец, двѣ плоскости, параллельныя плоскости xOy и отстоящія отъ нея соотвѣтственно на разстоянія z и $z + dz$; мы образуемъ такимъ образомъ бесконечно малый прямоугольный параллелепипедъ, имѣющій диагональ MM_1 ; ребрами его, исходящими изъ точки M , служатъ: 1° отрѣзокъ MH , направленный по прямой MR и имѣющій алгебраическую величину dr ; 2° отрѣзокъ MK , направленный по прямой MP и имѣющій алгебраическую величину $r d\theta$, и 3° отрѣзокъ ML , направленный по прямой MA и равный dz . Эти три отрѣзка представляютъ собой три проекціи элементарнаго перемѣщенія MM_1 на три оси MR , MP , MA . Чтобы получить три проекціи вектора V , равнаго отношенію $\frac{MM_1}{dt}$, нужно раздѣлить на dt три проекціи перемѣщенія MM_1 . Мы найдемъ такимъ образомъ, что

$$V_R = \frac{dr}{dt}, \quad V_P = r \frac{d\theta}{dt}, \quad V_A = \frac{dz}{dt}. \quad (3)$$

Такъ какъ направленія, на которыя мы проектировали, образуютъ ортогональный трехгранный уголъ, то квадратъ вектора V равенъ суммѣ квадратовъ проекцій:

$$V^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2}.$$

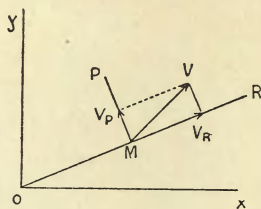
Частный случай: полярныя координаты въ плоскости. — Если точка M движется въ плоскости xOy , то мы имѣемъ постоянно $z = 0$. Векторъ-скорость MV также лежитъ въ плоскости xOy . Предыдущія формулы даютъ проекціи V_R и V_P этого вектора на продолженіе MR прямой OM и на перпендикуляръ MP къ этой прямой, обращенный въ сторону возрастающихъ значеній θ (фиг. 30):

$$V_R = \frac{dr}{dt}, \quad V_P = r \frac{d\theta}{dt}. \quad (3')$$

Мы найдемъ, слѣдовательно, что

$$V^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}.$$

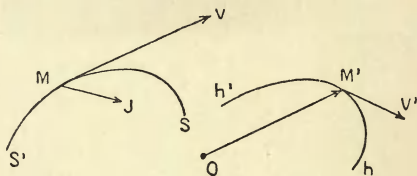
Эти послѣднія формулы могутъ быть также выведены, какъ



Фиг. 30.

частный случай, изъ тѣхъ формулъ, которыя были даны въ п. 25 для проекцій геометрической производной вектора.

39. Векторъ-ускореніе; годографъ. — При движеніи точки векторъ-скорость не остается неизмѣннымъ: его величина, или направленіе, или одновременно величина и направленіе измѣняются отъ одного момента къ другому. Для измѣренія скорости, съ которой



Фиг. 31.

измѣняется векторъ-скорость, вводятъ новый векторъ, который называется векторомъ-ускореніемъ или, проще, ускореніемъ.

Вообразимъ движущуюся точку, которая перемѣщается по нѣкоторой кривой. Пусть M будетъ ея положеніе въ моментъ t , и MV векторъ-скорость (фиг. 31). Чтобы представить ходъ измѣненія этого вектора съ теченіемъ времени t , возьмемъ произвольную неподвижную точку O и проведемъ черезъ нее векторъ OM' , равный и параллельный вектору-скорости MV . Если бы скорость движущейся точки сохраняла постоянную величину и направленіе, то точка M' оставалась бы неподвижной. Но съ измѣненіемъ t измѣняется также векторъ MV ; точка M' , конецъ вектора OM' , пере-

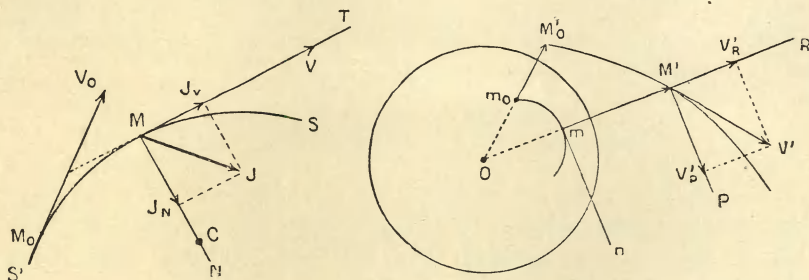
мѣщается и описываетъ по нѣкоторому закону линію $h'h$, которая называется годографомъ движенія точки M .

Въ каждый моментъ вспомогательная движущаяся точка M' , опредѣляемая такимъ образомъ, имѣетъ скорость, которая есть векторъ $M'V'$, касательный къ годографу; по опредѣленію, ускореніе точки M въ данный моментъ есть векторъ MJ , который, имѣя свое начало въ точкѣ M , равенъ и параллеленъ вектору $M'V'$.

Ускореніе MJ представляетъ собою, слѣдовательно, какъ и скорость, полярный векторъ, связанный съ движущейся точкой.

Ускореніе, какъ геометрическая производная вектора. — Векторъ-ускореніе связанъ съ движущейся точкой M ; согласно опредѣленію, данному въ п. 24, можно сказать, что онъ геометрически равенъ производной вектора-скорости по времени.

40. Аналитическія выраженія ускоренія: 1° Внутреннія выраженія. — Предположимъ, что движеніе опредѣлено траекторіей $S'S$ (фиг. 32) и закономъ движенія $s = f(t)$. Прежде всего



Фиг. 32.

замѣтимъ, что ускореніе MJ лежитъ въ соприкасающейся плоскости траекторіи въ точкѣ M . Дѣйствительно, коническая поверхность, образуемая векторомъ OM' , о которомъ мы говорили въ опредѣленіи ускоренія, есть конусъ прямыхъ, параллельныхъ касательнымъ къ траекторіи. Какъ извѣстно изъ курса Анализа¹⁾, соприкасающаяся плоскость къ траекторіи въ точкѣ M параллельна пло-

¹⁾ Р. Appell, *Éléments d'Analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens*, Chap. XI.

скости, касающейся этого конуса вдоль образующей OM' ; такъ какъ векторъ $M'V'$ лежитъ въ этой касательной плоскости, то геометрически равный ему векторъ M лежитъ въ соприкасающейся плоскости. Проведемъ въ точкѣ M главную нормаль MN къ траекторіи въ сторону вогнутости (центра кривизны) и найдемъ проекціи J_v и J_N ускоренія на векторъ скорости MV и на главную нормаль MN . Для этого мы будемъ поступать, какъ въ п. 25, основываясь на теоремахъ, установленныхъ относительно геометрической производной вектора.

Разсмотримъ слѣдъ m вектора OM' на сферѣ, описанной изъ центра O радіусомъ 1; пусть θ будетъ дуга m_0m сферической кривой, описанная точкой m отъ начального момента t_0 ; касательная mn , проведенная къ этой кривой въ ту сторону, въ которую она описывается точкой m , параллельна главной нормали MN и обращена въ одну съ ней сторону. Поэтому, если мы проведемъ черезъ точку M' прямую $M'P$, параллельную касательной mn , то проекціи вектора MJ на направленія скорости MV и главной нормали MN будутъ соответственно равны проекціямъ геометрически равнаго вектора $M'V'$ на продолженіе $M'R$ вектора OM' и на перпендикуляръ $M'P$. Но такъ какъ длина $r = OM'$ того вектора, производную котораго мы разсматриваемъ, равна величинѣ V скорости, то, согласно изложенному въ п. 25,

$$V'_R = \frac{dV}{dt}, \quad V'_P = V \frac{d\theta}{dt}.$$

Обозначимъ черезъ MM_1 бесконечно малую дугу траекторіи, пройденную за время dt ; согласно опредѣленіямъ, которыя даются кривизнѣ кривой и скорости, мы имѣемъ

$$\frac{MM_1}{d\theta} = \rho, \quad \frac{MM_1}{dt} = V,$$

гдѣ ρ есть радіусъ кривизны кривой въ точкѣ M ; отношеніе $\frac{d\theta}{dt}$ равно, слѣдовательно, частному $\frac{V}{\rho}$, и мы получаемъ окончательно формулы

$$J_v = \frac{dV}{dt}, \quad J_N = \frac{V^2}{\rho}. \quad (4)$$

Чтобы указать, что ускорение лежит въ соприкасающейся плоскости, мы можемъ прибавить къ полученнымъ формуламъ третью:

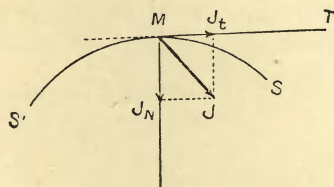
$$J_B = 0. \quad (4')$$

которая выражаетъ, что проекція ускоренія на бинормаль есть нуль.

Проекція J_V называется тангенціальнымъ или касательнымъ ускореніемъ; оно можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ; въ первомъ случаѣ оно направлено въ ту же сторону, что и векторъ V , во второмъ случаѣ — въ противоположную сторону. Проекція J_N называется нормальнымъ ускореніемъ; такъ какъ оно всегда бываетъ положительнымъ, то мы заключаемъ, что ускорение всегда лежитъ въ вогнутости траекторіи.

Мы можемъ также сказать, что нормальное ускорение J_N всегда направлено къ центру кривизны C траекторіи; на этомъ основаніи оно называется центробежнымъ.

Другая форма внутреннихъ формулъ. — Въ предыдущихъ формулахъ фигурируетъ абсолютная величина вектора-скорости. Эти формулы примѣняются часто въ нѣсколько иной формѣ, въ которую входитъ алгебраическая величина скорости. Проведемъ къ траекторіи касательную MT въ сторону положительныхъ дугъ (фиг. 32 и 33); мы видѣли, что алгебраическая величина v вектора-



Фиг. 33.

скорости MV , который считается положительнымъ въ сторону MT , равна $v = \frac{ds}{dt}$. Обозначимъ черезъ J_t проекцію вектора-ускоренія на касательную VT ; докажемъ, что

$$J_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad J_N = \frac{v^2}{\rho}, \quad J_B = 0. \quad (5)$$

Мы должны различать здѣсь два случая, такъ какъ величина v можетъ быть либо положительной, либо отрицательной.

1° Если величина v будетъ положительной, то векторъ MV направленъ въ положительную сторону касательной MT ; мы имѣемъ, слѣдовательно:

$$V = v, \quad J_t = J_v = \frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

2° Если же величина v будетъ отрицательной, то векторъ MV направленъ противоположно касательной MT ; въ такомъ случаѣ

$$V = -v, \quad J_t = -J_v = -\frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Въ обоихъ случаяхъ $V^2 = v^2$, и такимъ образомъ формулы (5) доказаны.

2° Проекціи ускоренія на координатныя оси. — Отнесемъ движеніе точки M , какъ въ п. 34, къ тремъ произвольнымъ координатнымъ осямъ Ox , Oy , Oz и обратимся вновь къ опредѣленію ускоренія при помощи годографа. Если мы возьмемъ векторъ OM' , равный и параллельный вектору-скорости, то координаты x' , y' , z' точки M' будутъ равны проекціямъ этого вектора:

$$(M') \quad x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}.$$

Такъ какъ ускореніе MJ геометрически равно скорости $M'V'$ точки M' , то его проекціями J_x , J_y , J_z на оси служатъ производныя $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ координатъ точки M' . Такимъ образомъ

$$(J) \quad J_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad J_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad J_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Шесть координатъ вектора-ускоренія MJ представляютъ собой производныя по времени шести соответственныхъ координатъ вектора скорости MV . Дѣйствительно, шесть количествъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}, \\ y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}, \quad z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}, \quad x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2},$$

образующихъ координаты вектора-ускоренія (проекціи и моменты).

суть производныя аналогичныхъ шести количествъ

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}, z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}, x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt},$$

относящихся къ скорости.

41. Нѣкоторые примѣры движенія точки: 1° Общій случай прямолинейнаго движенія. — Если траекторіей служить прямая, то векторъ-скорость, очевидно, направленъ по этой прямой. То же самое слѣдуетъ сказать и о векторѣ-ускореніи; дѣйствительно, такъ какъ кривизна $\frac{1}{\rho}$ равна нулю, то нормальная составляющая ускоренія, равная $\frac{v^2}{\rho}$, есть нуль.

Обратно, если въ нѣкоторомъ движеніи нормальное ускореніе $\frac{v^2}{\rho}$ постоянно равно нулю, то траекторіей служить прямая, потому что кривизна $\frac{1}{\rho}$ траекторіи есть нуль.

2° Общій случай равномернаго движенія. — Если точка, совершающая равномерное движеніе, описываетъ какую-либо линію, то ея векторъ-скорость имѣетъ постоянную величину V ; тангенціальная составляющая ускоренія $J_v = \frac{dV}{dt}$ равна, слѣдовательно, нулю; нормальная составляющая $J_N = \frac{V^2}{\rho}$ измѣняется обратно пропорціонально радіусу кривизны. Обратно, если тангенціальное ускореніе постоянно равно нулю, то $\frac{dV}{dt} = 0$, векторъ V остается постояннымъ, и данное движеніе есть равномерное.

3° Прямолинейное равномерное движеніе. — Въ прямолинейномъ равномерномъ движеніи ускореніе есть нуль, такъ какъ обѣ его составляющія J_N и J_v равны нулю. Это явствуетъ, впрочемъ, изъ самого опредѣленія ускоренія: такъ какъ скорость въ этомъ случаѣ постоянна по величинѣ и направленію, то годографъ сводится къ точкѣ.

Обратно, если ускореніе движущейся точки все время равно нулю, то точка обладаетъ прямолинейнымъ равномернымъ движеніемъ. Дѣйствительно, такъ какъ векторъ J есть нуль, то

нормальное ускореніе J_N равно нулю, — и движеніе будетъ прямолинейнымъ, а такъ какъ тангенціальное ускореніе J_T равно нулю, то движеніе также будетъ равномернымъ.

4° Прямолинейное простое колебательное движеніе.— Разсмотримъ точку, которая движется по оси Ox и абсцисса которой опредѣляется уравненіемъ

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (6)$$

гдѣ A и B суть какія-либо постоянныя, а ω есть положительная постоянная. Принято говорить, что эта точка совершаетъ простое колебательное движеніе. Введемъ положительную постоянную a и уголъ α , опредѣляемые уравненіями

$$a \cos \alpha = A, \quad a \sin \alpha = -B, \quad a = +\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Уравненіе движенія приметъ форму:

$$x = a \cos (\omega t + \alpha),$$

которая показываетъ, что абсцисса x колеблется между значеніями $-a$ и $+a$. Длина a называется амплитудой колебанія, аргументъ $\omega t + \alpha$ — фазой. Алгебраическая величина v скорости движущейся точки выразится такъ:

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin (\omega t + \alpha).$$

Продолжительностью T полного колебанія въ ту и въ другую сторону называется наименьшее постоянное приращеніе, которое должно получить время t для того, чтобы абсцисса x и скорость v , т. е. величины $\cos (\omega t + \alpha)$ и $\sin (\omega t + \alpha)$, получили тѣ же значенія, которыя онѣ имѣютъ въ моментъ t ; мы найдемъ, слѣдовательно, что

$$\omega T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ускореніе, которое считается положительнымъ въ направленіи Ox , имѣетъ величину

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha) = -\omega^2 x;$$

оно направлено, слѣдовательно, къ точкѣ O и равно разстоянію OM , умноженному на величину ω^2 .

5° Затухающее колебательное движение. — Разсмотримъ прямолинейное движение, опредѣляемое уравненіемъ

$$x = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

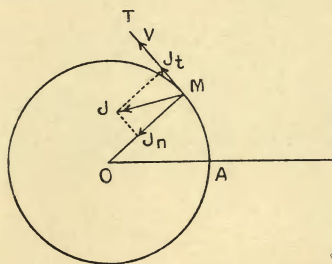
гдѣ A , B , ω и k суть постоянныя величины, изъ которыхъ двѣ послѣднія, кромѣ того, имѣютъ положительныя значенія. Это есть затухающее колебательное движение. Постоянная k называется коэффициентомъ затуханія; когда онъ обращается въ нуль, движение становится простымъ колебательнымъ.

Опредѣливъ тѣ моменты $t_0, t_1, t_2, \dots$, когда скорость обращается въ нуль, а также и соотвѣтствующія этимъ моментамъ абсциссы $x_0, x_1, x_2, \dots$, мы увидимъ, что эти моменты составляютъ арифметическую прогрессию съ разностью $\frac{\pi}{\omega}$, а соотвѣтственныя абсциссы составляютъ убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равенъ $e^{-k \frac{\pi}{\omega}}$. Это движение слагается изъ ряда колебаній, которыя имѣютъ постоянную продолжительность, но амплитуды которыхъ убываютъ и стремятся къ нулю.

6° Круговое движение. — Разсмотримъ, какъ въ п. 37, точку M , описывающую окружность центра O и радіуса R и движущуюся съ угловой скоростью

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

гдѣ θ обозначаетъ уголъ, составляемый радіусомъ OM съ неподвижнымъ радіусомъ OA (фиг. 34). Проведемъ къ окружности каса-



Фиг. 34.

тельную MT въ сторону положительныхъ дугъ, т. е. въ сторону

положительныхъ угловъ θ . Алгебраическая величина скорости v движения, которая считается положительной въ направленіи MT , равна

$$v = R\omega.$$

Сообразно съ этимъ, составляющія J_t и J_N вектора-ускоренія по касательной MT и по нормали MO соответственно равны

$$J_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt},$$

$$J_N = \frac{v^2}{\rho} = R\omega^2,$$

такъ какъ радіусъ кривизны ρ равенъ R . Количество $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ иногда называется угловымъ ускореніемъ.

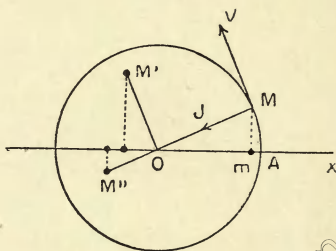
Случай равномернаго круговаго движенія. — Въ случаѣ равномернаго движенія, величины ω и v будутъ постоянными, и J_t есть нуль; ускореніе будетъ нормальнымъ; оно направлено къ центру и имѣетъ постоянную величину

$$J = \frac{v^2}{R} = R\omega^2.$$

7° Представленіе простаго колебательнаго движенія посредствомъ проекціи вращающагося вектора. — Разсмотримъ векторъ OM , имѣющій постоянную длину a и вращающійся вокругъ точки O съ постоянной угловой скоростью ω . Уголъ $\theta = AOM$, образуемый радіусомъ OM съ неподвижнымъ радіусомъ OA , возрастаетъ пропорціонально времени, такъ что

$$\theta = \omega t + \alpha,$$

гдѣ α есть значеніе угла θ въ моментъ $t = 0$. Проекція m точки M



Фиг. 35.

на ось OA (фиг. 35) имѣетъ абсциссу

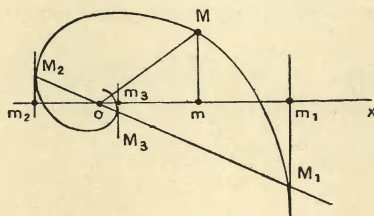
$$x = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Эта проекція m совершаетъ, слѣдовательно, простое колебательное движеніе. Скорость и ускореніе этого движенія суть проекціи $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ вектора-скорости MV и вектора ускоренія MJ точки M на радіусъ OA . Проведемъ черезъ точку O векторы OM' и OM'' , соответственно равные геометрически векторамъ MV и MJ . Векторъ OM' длины ωa составляетъ съ радіусомъ OA уголъ $\theta + \frac{\pi}{2}$, а векторъ OM'' , равный $\omega^2 a$, составляетъ съ радіусомъ OA уголъ $\theta + \pi$. Мы можемъ поэтому сказать: 1° скорость колебательнаго движенія точки m получается путемъ проектированія на радіусъ OA вращающагося вектора OM' , который равенъ ωa и опережаетъ векторъ OA на прямой уголъ, и 2° ускореніе колебательнаго движенія получается путемъ проектированія на радіусъ OA вращающагося вектора OM'' , равнаго $\omega^2 a$ и находящагося на два прямыхъ угла впереди вектора OM .

Этотъ способъ представленія часто употребляется въ физикѣ, особенно въ ученіи объ электричествѣ.

8° Аналогичное представленіе затухающаго колебательнаго движенія. — Затухающее колебательное движеніе можно представить способомъ, аналогичнымъ предыдущему.

Разсмотримъ радіусъ $OM = r$, который вращается съ постоянной угловой скоростью ω , такъ что уголъ $xOM = \theta$ равенъ $\omega t + \alpha$.



Фиг. 36.

Предположимъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что длина r этого радіуса измѣняется въ зависимости отъ времени по закону

$$r = ae^{-kt},$$

гдѣ a и k обозначаютъ постоянныя положительныя величины. Въ такомъ случаѣ проекція m точки M на ось Ox совершаетъ затухающее колебательное движеніе. Дѣйствительно, абсцисса x точки m равна

$$x = ae^{-kt} \cos(\omega t + \alpha).$$

Точка M описываетъ въ плоскости кривую

$$r = ae^{-\frac{k}{\omega}(t - \alpha)},$$

т. е. логариѳмическую спираль.

Крайнія точки послѣдовательныхъ колебательныхъ движеній, совершаемыхъ точкой m , являются проекціями тѣхъ точекъ $M_1, M_2, M_3, \dots$ спирали, въ которыхъ касательныя перпендикулярны къ оси Ox . Такъ какъ эти точки расположены на прямой, проходящей черезъ начало ¹¹⁾, то продолжительность одного полуколебанія $m_1 m_2, m_2 m_3, \dots$ равна времени полуоборота радіуса OM , т. е. $\frac{\pi}{\omega}$. Такъ какъ спираль ассимптотически приближается къ точкѣ O , то точки $m_1, m_2, m_3, \dots, m_p$ стремятся къ началу O , и амплитуда колебаній стремится къ нулю. Наконецъ, такъ какъ въ разсматриваемой логариѳмической спирали для перехода отъ одной изъ точекъ $M_1, M_2, M_3, \dots$ къ слѣдующей нужно умножать соотвѣтственные радіусы-векторы на $e^{-\frac{k\pi}{\omega}}$, то амплитуды $Om_1, Om_2, \dots, Om_p$ убываютъ въ геометрической прогрессіи съ знаменателемъ $e^{-\frac{k\pi}{\omega}}$.

42. Діаграммы. — Вообразимъ точку, которая движется по данной кривой. Чтобы опредѣлить движеніе, достаточно задать соотношеніе между дугой s и временемъ t

$$s = f(t),$$

которое называется закономъ пространства. Изъ него выводится, какъ мы видѣли, законъ скорости

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

и законъ тангенціального ускоренія

$$J_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = f''(t).$$

Въ приложенияхъ часто не довольствуются формулами, и посредствомъ вспомогательныхъ плоскихъ кривыхъ представляютъ измѣненіе пространства s или скорости v или тангенціального ускоренія J_t въ функціи времени. Эти вспомогательныя кривыя, которыя называются діаграммами движенія, получаются слѣдующимъ образомъ: принимаютъ время за абсциссу, а дугу s , или скорость v , или тангенціальное ускореніе J_t за ординату.

Напримѣръ, если въ равномерномъ перемѣнномъ движеніи

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

то діаграммой пространствъ служитъ парабола, ось которой параллельна оси Os пространствъ; діаграмма скоростей

$$v = v_0 + g t$$

есть прямая, имѣющая угловой коэффициентъ g и начальную ординату v_0 ; діаграммой тангенціальныхъ ускореній

$$J_t = g$$

служитъ прямая, параллельная оси времени.

Въ простомъ колебательномъ движеніи

$$x = a \cos (\omega t + \alpha)$$

діаграммами пространствъ, скоростей и тангенціальныхъ ускореній служатъ синусоиды, отличающіяся тѣмъ свойствомъ, что каждая получается изъ предыдущей, если умножить ея ординаты на ω и перемѣстить ее параллельно оси времени на разстояніе $\frac{\pi}{2\omega}$.

III. ДВИЖЕНІЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

43. Примѣры движенія твердаго тѣла. — Въ п. 27 мы дали опредѣленіе неизмѣняемой системы, или твердаго тѣла. Когда твердое тѣло движется относительно нѣкоторой системы сравненія, то различныя точки тѣла $A, B, C, \dots$ описываютъ опредѣленныя траекторіи съ опредѣленными скоростями и опредѣленными ускореніями. Взаимныя разстоянія этихъ точекъ $AB, BC, AC, \dots$ остаются неизмѣнными.

Часто въ качествѣ системы сравненія выбираютъ землю и относятъ къ землѣ движенія, наблюдаемая на ея поверхности.

Если мы бросимъ, напримѣръ, въ воздухѣ тяжелое твердое тѣло, какъ-то камень, палку и т. п., то мы увидимъ вообще, что это тѣло перемѣщается, вращаясь вокругъ самого себя; его центр тяжести описываетъ кривую, близкую къ параболѣ съ вертикальной осью (эта кривая при отсутствіи сопротивленія воздуха переходитъ въ точную параболу).

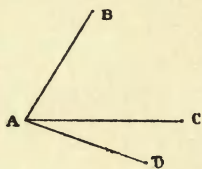
Мы начнемъ съ простыхъ движеній, совершаемыхъ обыкновенными предметами и машинами. Эти движенія слѣдующія:

Поступательное движеніе;

Вращательное движеніе;

Геликоидальное, или винтовое движеніе.

44. Поступательное движеніе.—Твердое тѣло обладаетъ поступательнымъ движеніемъ относительно системы сравненія (S), если оно перемѣщается такимъ образомъ, что всѣ прямолинейные отрѣзки, соединяющіе попарно точки тѣла, остаются параллельными неподвижнымъ направленіямъ, взятымъ въ системѣ (S). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы трехгранный уголъ, получаемый путемъ соединенія точки A тѣла (фиг. 37) съ тремя другими его

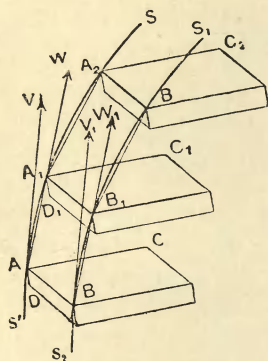


Фиг. 37.

точками B , C и D , не лежащими въ одной плоскости съ точкой A , перемѣщался параллельно трехгранному углу, неизмѣнно связанному съ системой (S); достаточно даже, чтобы ребра угла BAC перемѣщались параллельно двумъ неподвижнымъ направленіямъ системы (S), потому что тогда ребро AD должно будетъ сохранять неизмѣнное направленіе.

Можно сказать другими словами, что твердое тѣло обладаетъ поступательнымъ движеніемъ, если оно перемѣщается, не измѣняя своей ориентировки относительно системы сравненія.

Вообразимъ, напримѣръ, твердый параллелопипедъ (фиг. 38), перемѣщающійся такимъ образомъ, что одна изъ его вершинъ A



Фиг. 38.

описываетъ произвольную кривую $S'S$, а его ребра AB , AC , AD сохраняютъ постоянныя направленія относительно земли; параллелопипедъ обладаетъ въ такомъ случаѣ поступательнымъ движеніемъ относительно земли.

Въ поступательномъ движеніи траекторіи, описываемыя различными точками твердаго тѣла, равны и посредствомъ поступательнаго движенія могутъ быть приведены къ совмѣщенію. — Это вытекаетъ изъ того, что прямая AB (фиг. 38), соединяющая двѣ точки тѣла сохраняетъ во время движенія постоянную величину и направленіе. Поэтому, если мы знаемъ траекторію одной изъ точекъ тѣла, то намъ извѣстны также траекторіи всѣхъ другихъ.

Когда траекторіи различныхъ точекъ суть прямыя, которыя необходимо должны быть параллельны другъ другу, то поступательное движеніе называется прямолинейнымъ. Когда траекторіями различныхъ точекъ служатъ окружности, то послѣднія должны быть равны и лежать въ параллельныхъ плоскостяхъ; такое поступательное движеніе называется круговымъ.

Въ поступательномъ движеніи всѣ точки твердаго тѣла въ одинъ и тотъ же моментъ имѣютъ геометрически равныя скорости.

Дѣйствительно, пусть A и B (фиг. 38) будутъ положенія двухъ произвольныхъ точекъ въ моментъ t , положенія же этихъ точекъ въ послѣдующій моментъ $t + \Delta t$ пусть будутъ A_1 и B_1 . Такъ какъ отрѣзки AB и A_1B_1 равны и параллельны, то и хорды AA_1 и BB_1 равны и параллельны. Среднія скорости AW и BW_1 , равныя соответственно отношеніямъ $\frac{AA_1}{\Delta t}$ и $\frac{BB_1}{\Delta t}$, равны по величинѣ и направленію и обращены въ одну сторону. Слѣдовательно, скорости AV и BV_1 точекъ A и B въ моментъ t геометрически равны.

Общій для всѣхъ точекъ векторъ-скорость называется скоростью поступательнаго движенія въ моментъ t .

Въ поступательномъ движеніи всѣ точки твердаго тѣла въ одинъ и тотъ же моментъ имѣютъ одинаковое ускореніе. — Дѣйствительно, такъ какъ всѣ точки имѣютъ въ любой моментъ одну и ту же скорость, то годографъ для всѣхъ точекъ есть одна и та же кривая, описываемая однимъ и тѣмъ же образомъ; слѣдовательно, ускореніе всѣхъ точекъ имѣетъ одну и ту же величину и направленіе и обращено въ одну и ту же сторону. Оно называется ускореніемъ поступательнаго движенія.

Аналитическое изученіе. — Отнесемъ поступательное движеніе къ тремъ неподвижнымъ осямъ Ox, Oy, Oz ; пусть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 будутъ координаты двухъ произвольныхъ точекъ A и B твердаго тѣла. Прямая AB перемѣщается параллельно себѣ самой; ея проекціи

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1 \quad (1)$$

суть постоянныя величины; производныя этихъ проекцій равны, слѣдовательно, нулю, и мы имѣемъ уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} &= 0, & \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} &= 0, & \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2} &= 0, & \frac{d^2y_2}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2} &= 0, & \frac{d^2z_2}{dt^2} - \frac{d^2z_1}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

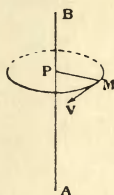
Эти уравненія выражаютъ, что точки имѣютъ одну и ту же скорость и одно и то же ускореніе.

Обратно, если твердое тѣло движется такимъ образомъ, что въ каждый моментъ всѣ его точки имѣютъ одну и ту же скорость, то оно обладаетъ поступательнымъ движеніемъ. Для доказательства разсмо-

тримъ двѣ какія-либо точки тѣла $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Согласно предположенію, уравненія (2) имѣютъ мѣсто для любого момента t ; слѣдовательно, разности (1) суть постоянныя, и отрѣзокъ AB имѣетъ постоянную величину и постоянное направленіе. Тѣло обладаетъ поступательнымъ движеніемъ.

45. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.—

Вообразимъ твердое тѣло (фиг. 39), въ которомъ точки, принадлежащія определенной прямой AB должны оставаться неподвиж-



Фиг. 39.

ными по отношенію къ системѣ сравненія; при такомъ условіи тѣло можетъ только вращаться вокругъ прямой AB , которая называется осью вращенія.

Каждая точка M тѣла описываетъ окружность, плоскость которой перпендикулярна къ оси; центръ этой окружности есть проекція P точки M на ось, а радиусъ равенъ разстоянію MP точки отъ оси. Скорость точки въ моментъ t есть векторъ MV , касательный къ окружности, т. е. векторъ MV , проведенный въ сторону движенія перпендикулярно къ плоскости MAV точки M и оси.

Угловая скорость. — Если назовемъ черезъ θ уголъ, на который повернулось тѣло, начиная отъ нѣкотораго положенія (онъ измѣряется въ частяхъ радіуса), то всѣ такіе радіусы, какъ PM , повернутся въ теченіе времени dt на одинъ и тотъ же уголъ $d\theta$; они имѣютъ слѣдовательно (п. 37), одну и ту же угловую скорость

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Это количество называется угловой скоростью тѣла въ моментъ t . Линейная скорость точки M , лежащей на разстояніи MP отъ оси, имѣетъ величину (п. 37)

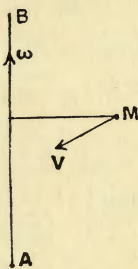
$$v = \omega \cdot MP.$$

Ось есть геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ скорость нуль.

Равномѣрное вращательное движеніе. — Въ общемъ случаѣ угловая скорость измѣняется вмѣстѣ съ временемъ t , потому что тѣло въ одни моменты можетъ вращаться быстрее, чѣмъ въ другіе. Когда ω есть постоянная величина, то вращательное движеніе есть движеніе равномѣрное.

Представленіе вращенія посредствомъ вектора. — Чтобы опредѣлить скорости въ моментъ t различныхъ точекъ твердаго тѣла, обладающаго вращательнымъ движеніемъ, нужно знать три элемента: ось вращенія, величину угловой скорости и сторону, въ которую происходитъ вращеніе. Эти три элемента мы представимъ посредствомъ вектора слѣдующимъ образомъ: на оси вращенія (фиг. 40) мы возьмемъ произвольную точку A , и, исходя отъ этой точки, мы нанесемъ на оси векторъ $A\omega$, равный по длинѣ абсолютной величинѣ $|\omega|$ угловой скорости и обращенный въ такую сторону, что точки тѣла вращаются въ положительномъ направленіи вокругъ оси, ориентированной по вектору $A\omega$.

Всякому вращенію соотвѣтствуетъ такимъ образомъ векторъ, точкой приложенія котораго A служитъ произвольно взятая точка на оси. Обратно, вращеніе вполне характеризуется векторомъ $A\omega$. Дѣйствительно, если данъ этотъ векторъ, то мы знаемъ ось вращенія, которая есть не что иное, какъ основаніе вектора, знаемъ также угловую скорость, которая выражается тѣмъ же числомъ, что и

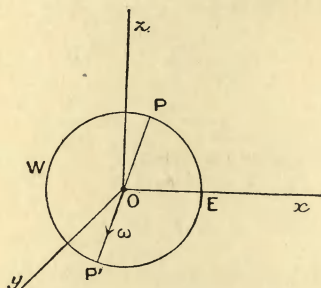


Фиг. 40.

длина вектора $A\omega$, и, наконецъ, знаемъ сторону вращенія; это есть положительная сторона вращеній вокругъ оси $A\omega$. Такимъ образомъ векторъ, представляющій вращеніе, приложенъ къ прямой, а именно — къ оси вращенія; кромѣ того, это есть осевой векторъ.

Отождествляя вращательное движение съ представляющимъ его векторомъ, говорятъ часто, что тѣло обладаетъ въ моментъ t вращеніемъ $A\omega$.

Примѣръ. — Въ видѣ примѣра рассмотримъ вращательное движение земли вокругъ ея оси. По отношенію къ трехгранному углу $Oxyz$, вершина котораго находится въ центрѣ земного шара (фиг. 41) и ребра направлены



Фиг. 41.

къ тремъ неподвижнымъ звѣздамъ, земля обладаетъ равномернымъ вращательнымъ движеніемъ вокругъ оси PP' , неизмѣнно связанной съ трехграннымъ угломъ. Эта ось называется линіей полюсовъ; точки пересѣченія ея съ поверхностью земного шара суть полюсы земли P и P' ; предположимъ, что на фигурѣ 41 точка P представляетъ сѣверный полюсъ, а точка P' южный полюсъ. Продолжительность оборота приблизительно на 4 минуты ($3' 55'',91$) короче среднихъ сутокъ: это такъ называемая звѣздная сутки, содержащая въ точности

$$T = 24.60^2 - 3.60 - 55,91$$

секундъ средняго времени. Это вращательное движение совершается отъ запада (W) къ востоку (E). Его угловая скорость равна

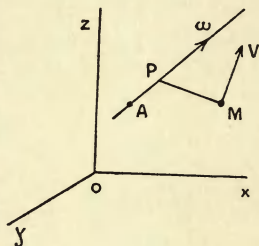
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 0,000\ 0729; \quad (3)$$

это число немного больше половины угловой скорости секундной стрѣлки часовъ. Векторъ $O\omega$, представляющій вращеніе земли, направленъ, слѣдовательно, по оси PP' въ сторону PP' ; его величина измѣряется числомъ ω .

Точка на землѣ, находящаяся на разстояніи r отъ оси, имѣетъ по отношенію къ трехгранному углу $Oxyz$ линейную скорость v , равную ωr ; для точки экватора $r = 6378253$ метрамъ, и линейная скорость равна 465 метрамъ въ секунду; на широтѣ Эдинбурга эта скорость не превышаетъ 260 метровъ въ секунду; на полюсѣ она равна нулю.

Аналитическое изученіе. Проекціи скорости точки тѣла. — Возьмемъ въ моментъ t три прямоугольныя оси $Oxyz$

(фиг. 42); пусть x_0, y_0, z_0 будутъ координаты произвольно выбранной точки A на оси вращенія и p, q, r — проекціи вектора $A\omega$, представляющаго вращеніе. Векторъ-скорость MV точки M тѣла есть не что иное, какъ моментъ вектора $A\omega$ около точки M : дѣйствительно,



Фиг. 42.

эта скорость перпендикулярна къ плоскости $MA\omega$, равна произведению $\omega.MP$ и направлена въ положительную сторону вращеній вокругъ оси $A\omega$. Если мы назовемъ черезъ x, y, z координаты точки M , то проекціи V_x, V_y, V_z , скорости точки M будутъ даны, слѣдовательно, формулами пункта 11, выражающими проекціи момента вектора около точки x', y', z' . Достаточно замѣнить въ этихъ формулахъ проекціи X_1, Y_1, Z_1 черезъ p, q, r , координаты x_1, y_1, z_1 и x', y', z' соответственно черезъ x_0, y_0, z_0 и x, y, z . Мы получимъ такимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= q(z - z_0) - r(y - y_0), \\ V_y &= r(x - x_0) - p(z - z_0), \\ V_z &= p(y - y_0) - q(x - x_0). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Случай, когда ось вращенія проходитъ черезъ начало. — Въ этомъ случаѣ можно взять точку A въ началѣ O ; координаты x_0, y_0, z_0 обращаются въ нули, и мы получимъ:

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qx. \quad (5)$$

Случай, когда ось вращенія параллельна оси Oz . — Пусть x_0, y_0 будутъ координаты точки A , въ которой ось пересѣкаетъ плоскость xy ; проекціи p и q равны нулю и $r = \omega$, такъ что формулы получаютъ слѣдующій видъ:

$$V_x = -\omega(y - y_0), \quad V_y = \omega(x - x_0), \quad V_z = 0; \quad (6)$$

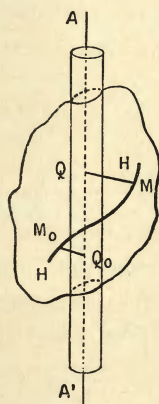
въ этихъ формулахъ угловая скорость ω считается положительной въ сторону положительныхъ вращеній вокругъ оси Oz . Когда тѣло

вращается вокруг самой оси Oz , то координаты x_0 и y_0 равны нулю, и мы получаемъ формулы:

$$V_x = -\omega y, \quad V_y = \omega x, \quad V_z = 0. \quad (7)$$

46. Винтовое движеніе.—Винтовымъ движеніемъ твердаго тѣла называется движеніе винта въ гайкѣ или пробочника въ пробкѣ. Дадимъ строгое опредѣленіе этого движенія и изучимъ его въ особенности съ точки зрѣнія распредѣленія скоростей различныхъ точекъ твердаго тѣла.

Вообразимъ движущееся твердое тѣло, пронизанное каналомъ въ формѣ цилиндра вращенія; черезъ этотъ каналъ въ тѣлѣ проходить неподвижный цилиндръ вращенія, имѣющій такую же ось $A'A$ (фиг. 43) и такой же радіусъ, какъ первый.



Фиг. 43.

При такихъ условіяхъ тѣло можетъ совершать безконечное множество движеній: можно, напримѣръ, вращать его вокругъ оси, или перемѣщать вдоль оси, или одновременно вращать и перемѣщать. Въ каждомъ изъ этихъ движеній всѣ точки твердаго тѣла вращаются на одинъ и тотъ же уголъ и перемѣщаются на одинаковое разстояніе параллельно оси.

Пусть M_0 будетъ положеніе произвольной точки тѣла въ начальный моментъ t_0 , M —положеніе той же точки въ послѣдующій моментъ t , M_0Q_0 и MQ перпендикуляры, опущенные изъ точекъ M и M_0 на ось $A'A$; разстоянія M_0Q_0 и MQ , очевидно, равны.

Разстояніе L , на которое перемѣстилось тѣло вдоль оси за промежутокъ $t - t_0$, равно отрезку Q_0Q , который считается положительнымъ въ направленіи $A'A$, а уголъ Θ , на который тѣло повернулось за это же время, равенъ углу между перпендикулярами QM и Q_0M_0 ; этотъ уголъ считается положительнымъ въ направленіи положительныхъ вращеній вокругъ оси $A'A$.

Движеніе тѣла называется винтовымъ, если значенія L и Θ измѣняются вмѣстѣ съ t такимъ образомъ, что ихъ отношеніе $\frac{L}{\Theta}$ остается постояннымъ. Другими словами, тѣло обладаетъ винтовымъ движеніемъ, если длина, на которую оно перемѣщается вдоль неподвижной оси, пропорціональна углу, на который оно поворачивается вокругъ оси.

Ходомъ винтового движенія называется длина h , на которую перемѣщается тѣло вдоль оси за время, въ теченіе котораго оно поворачивается на уголъ 2π . Такимъ образомъ,

$$\frac{L}{\Theta} = \frac{h}{2\pi}, \quad L = \frac{h}{2\pi} \Theta, \quad (8)$$

и этимъ указывается простое геометрическое значеніе отношенія $\frac{L}{\Theta}$. При тѣхъ условіяхъ, которыя мы заключили относительно знаковъ количествъ L и Θ , величина h также имѣетъ знакъ, а именно знакъ плюсъ или минусъ, смотря по тому, перемѣщается ли тѣло съ возрастаніемъ угла Θ въ положительную или отрицательную сторону оси. Мы видимъ, что существуютъ два вида винтовыхъ движеній: однимъ соотвѣтствуетъ положительное отношеніе $\frac{L}{\Theta}$, а другимъ — отрицательное. Для винтовъ и пробочниковъ это отношеніе — отрицательное: дѣйствительно, если направленіемъ оси $A'A$ считать вертикальное направленіе вверхъ, то при ввинчиваніи винта въ столъ мы вращаемъ винтъ вокругъ оси $A'A$ въ положительномъ направленіи, и потому уголъ Θ является положительнымъ, а разстояніе L отрицательнымъ.

Количества

$$g = \frac{dL}{dt}, \quad \omega = \frac{d\Theta}{dt}$$

называются соотвѣтственно скоростью скольженія или поступательнаго движенія и угловой скоростью вращенія твердаго

Такъ какъ уголъ Θ и количество L равны соотвѣтственно $\widehat{m_0Om}$ и Q_0Q , то точка M въ моментъ t будетъ имѣть координаты

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 + \Theta, \quad z = z_0 + L.$$

откуда, дифференцируя, получимъ:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{dz}{dt} = g.$$

Сравненіе съ выраженіями составляющихъ скорости въ цилиндрическихъ координатахъ (п. 38) показываетъ, что составляющая скорости V точки M по продолженію перпендикуляра OM есть нуль. Другія двѣ составляющія, по направленію перпендикуляра MP къ плоскости MOz и по прямой MA , параллельной оси Oz , равны

$$V_P = r \frac{d\theta}{dt} = r_0 \omega, \quad V_A = \frac{dz}{dt} = g. \quad (9)$$

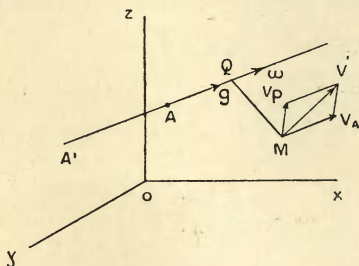
Скорость V , представляющая собой геометрическую сумму этихъ двухъ векторовъ, перпендикулярна къ радіусу OM и равна $\sqrt{r_0^2 \omega^2 + g^2}$; уголъ α , образуемый ею съ осью Oz , опредѣляется слѣдующей формулой:

$$\tan \alpha = \frac{V_P}{V_A} = \frac{r_0 \omega}{g} = 2\pi \frac{r_0}{h}.$$

Такъ какъ съ измѣненіемъ времени t этотъ уголъ остается постояннымъ, то траекторія точки M пересѣкаетъ подъ постояннымъ угломъ образующія цилиндра вращенія, на которомъ лежитъ эта линія: это, конечно, винтовая линія.

Равномѣрное винтовое движеніе. — До сихъ поръ мы считали величины g и ω такими функциями отъ времени t , отношеніе которыхъ есть величина постоянная. Если же скорости g и ω отдѣльно взятыя постоянны, то винтовое движеніе будетъ равномѣрнымъ. При такомъ движеніи скорость V каждой точки M тѣла имѣетъ постоянную величину; эта точка равномѣрно движется, описывая винтовую линію.

Аналитическія выраженія. — Возьмемъ три произвольныя прямоугольныя оси (фиг. 45). Выберемъ на оси винтового движенія положительное направленіе $A'A$ такимъ образомъ, чтобы угловая скорость вращенія ω была положительной, и изобразимъ это вращеніе



Фиг. 45.

векторомъ $A\omega$, нанесеннымъ на ось; съ другой стороны, пусть Ag будетъ векторъ, геометрически равный скорости поступательнаго движенія V_A , и g — алгебраическая величина этого вектора, который считается положительнымъ въ направленіи $A\omega$. Если назовемъ черезъ α, β, γ направляющіе косинусы вектора $A\omega$, и черезъ x_0, y_0, z_0 координаты точки A , то проекціи p, q, r и a, b, c векторовъ вращенія и поступательнаго движенія будутъ равны:

$$\begin{aligned} p &= \omega\alpha, & q &= \omega\beta, & r &= \omega\gamma, \\ a &= g\alpha, & b &= g\beta, & c &= g\gamma. \end{aligned}$$

Скорость вращенія V_p точки M съ координатами x, y, z имѣетъ проекціи [п. 45, формулы (4)]:

$$q(z - z_0) - r(y - y_0), \quad \dots, \quad \dots$$

Скорость V_A поступательнаго движенія той же точки имѣетъ проекціи a, b, c . Проекціи вектора V , геометрической суммы двухъ предыдущихъ, равны, слѣдовательно,

$$\left. \begin{aligned} V_x &= a + q(z - z_0) - r(y - y_0), \\ V_y &= b + r(x - x_0) - p(z - z_0), \\ V_z &= c + p(y - y_0) - q(x - x_0). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Въ этихъ формулахъ количества a, b, c, p, q, r являются функциями времени, удовлетворяющими слѣдующимъ равенствамъ

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{g}{\omega} = \frac{h}{2\pi}, \quad (11)$$

гдѣ h есть постоянная величина.

Если координатныя оси $Oxyz$ неподвижны, и если движеніе равнофѣрно, то эти шесть координатъ будутъ постоянными.

Ось винтового движенія есть геометрическое мѣсто точекъ тѣла, для которыхъ составляющая V_P скорости есть нуль, т. е. геометрическое мѣсто точекъ, скорость которыхъ параллельна вектору $A\omega$, представляющему вращеніе.

Приведенныя формулы. — Если ось $A\omega$ винтового движенія возьмемъ за ось Oz , то наши формулы примутъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} p &= q = 0, & r &= \omega, \\ a &= b = 0, & c &= g, \\ x_0 &= y_0 = z_0 = 0, \\ V_x &= -\omega y, & V_y &= \omega x, & V_z &= g, \\ \frac{g}{\omega} &= \frac{h}{2\pi}. \end{aligned}$$

Ускореніе. — Если оси $Oxyz$ неподвижны, то проекціи V_x, V_y, V_z скорости точки тѣла равны соотвѣтственно $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

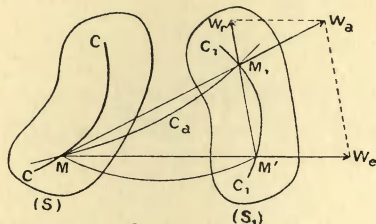
Новое дифференцированіе по t дастъ намъ проекціи $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ ускоренія точки. Мы не будемъ писать этихъ формулъ, такъ какъ онѣ не имѣютъ никакого приложенія въ послѣдующемъ; ниже мы въ видѣ приложенія теоремы Кориолиса опредѣлимъ ускореніе для случая равнофѣрнаго винтового движенія (п. 56).

IV. — СКОРОСТЬ ВЪ ОТНОСИТЕЛЬНОМЪ ДВИЖЕНІИ. СЛОЖЕНІЕ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХЪ И ВРАЩАТЕЛЬНЫХЪ ДВИЖЕНІЙ. СКОРОСТИ ТОЧЕКЪ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

47. Замѣна системы сравненія; относительное движеніе, скорость. — Вообразимъ неизмѣняемую систему (S), обладающую извѣстнымъ движеніемъ по отношенію къ неподвижнымъ осямъ, и точку M , движущуюся относительно этой системы. Напримѣръ, системой (S) служить земля, а точка M есть тяжелая точка, представленная самой себѣ на поверхности земли и падающая по вертикальной линіи. Для наблюдателя, который переносится вмѣстѣ съ системой (S), такъ называемой системой сравненія, точка M обладаетъ по отношенію къ системѣ (S) нѣкоторымъ движеніемъ,

которое носить название относительнаго движенія; траекторія, скорость и ускореніе этого движенія называются относительными. Та же самая точка обладает нѣкоторымъ абсолютнымъ движеніемъ по отношенію къ осямъ, которыя разсматриваются, какъ неподвижныя.

На фигурѣ 46 кривая C представляетъ относительную траекторію движущейся точки M относительно системы сравненія (S).



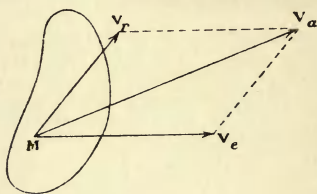
Фиг. 46.

Въ теченіе того времени, когда движущаяся точка описываетъ эту кривую C , неизмѣнно связанную съ системой (S), послѣдняя перемѣщается относительно неподвижныхъ осей такимъ образомъ, что въ моментъ t движущаяся точка, система сравненія и относительная траекторія занимаютъ соотвѣтственно положенія M , (S) и C , тогда какъ въ моментъ $t + \Delta t$ онѣ занимаютъ положенія M_1 , (S_1) и C_1 . Абсолютное перемѣщеніе движущейся точки есть MM_1 ; точка переходитъ изъ M въ M_1 по нѣкоторой траекторіи C_a , которая и есть абсолютная траекторія.

Обозначимъ черезъ M' положеніе, занимаемое въ моментъ $t + \Delta t$ той точкой системы (S), которая совпадаетъ съ точкой M въ моментъ t ; перемѣщеніе $M'M_1$ есть относительное перемѣщеніе точки M ; перемѣщеніе MM' называется переноснымъ перемѣщеніемъ. Векторъ MM_1 есть геометрическая сумма векторовъ $M'M_1$ и MM' ; если мы отложимъ на этихъ векторахъ соотвѣтственно отрѣзки MW_a , $M'W_r$, MW_e , равные соотвѣтственнымъ частнымъ отъ дѣленія этихъ векторовъ на Δt , то эти отрѣзки представятъ намъ среднюю абсолютную, среднюю относительную и среднюю переносную скорости; первая есть геометрическая сумма двухъ другихъ:

$$(W_a) = (W_r) + (W_e)$$

Когда приращеніе Δt стремится къ нулю (фиг. 47), эти три отръзка переходятъ въ предѣлѣ соответственно въ абсолютную ско-



Фиг. 47.

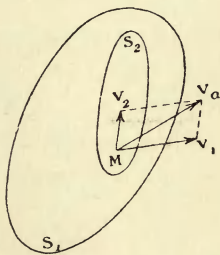
рость V_a , въ относительную скорость V_r и переносную скорость V_e ; мы получаемъ, такимъ образомъ, геометрическое равенство

$$(V_a) = (V_r) + (V_e).$$

Согласно изложенному, переносная скорость V_e есть скорость той точки системы (S) , которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ точкой M ; можно также сказать, что переносная скорость есть та, которую обладала бы точка M , если бы она была въ занимаемомъ ею положеніи неизмѣнно связана съ системой (S) .

48. Приложение. Сложеніе поступательныхъ и вращательныхъ движеній. — Примѣнимъ это правило къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ, касающихся движенія твердаго тѣла.

Сложеніе поступательныхъ движеній. — Возьмемъ не-



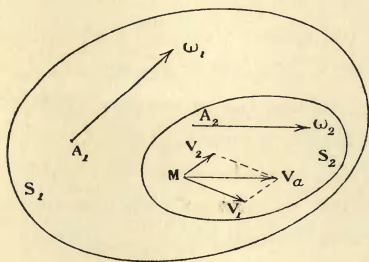
Фиг. 48.

измѣняемую систему S_1 , обладающую поступательнымъ движеніемъ со скоростью V_1 , и вторую систему S_2 , обладающую поступательнымъ движеніемъ относительно системы S_1 со скоростью V_2 (фиг. 48).

Абсолютная скорость V_a точки M системы S_2 есть геометрическая сумма ее относительной скорости, равной V_2 , и переносной скорости, которая равна V_1 . Абсолютные скорости различных точек системы S_2 , следовательно, таковы же, как если бы система S_2 обладала единственным поступательным движением со скоростью, равной геометрической сумме двух скоростей V_1 и V_2 . Мы говорим, что два поступательных движения складываются в одно. Точно так же несколько поступательных перемещений складываются в одно, скорость которого равна геометрической сумме скоростей данных поступательных движений.

Система двух вращений. — Предположим, что твердое тело S_1 обладает вращением $A_1\omega_1$; представим себе, что это тело S_1 несет с собой ось $A_2\omega_2$, и что твердое тело S_2 обладает по отношению к системе S_1 вращением ω_2 вокруг оси $A_2\omega_2$ (фиг. 49).

Найдем абсолютную скорость произвольной точки M тела S_2 . Относительная скорость точки M по отношению к телу S_1 есть



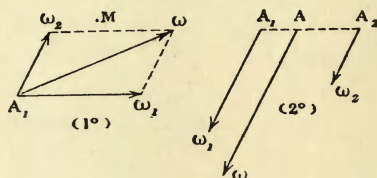
Фиг. 49.

скорость V_2 , которою она обладает при вращении ω_2 : это моментъ вектора ω_2 относительно точки M ; переносной скоростью является скорость V_1 , которою обладала бы точка M , если бы она была связана с системой S_1 : это есть скорость, обусловленная вращением ω_1 , или моментъ вектора ω_1 относительно точки M . Абсолютная скорость V_a точки M есть, следовательно, главный моментъ системы двух векторовъ ω_1 и ω_2 около точки M . Эта скорость не зависит отъ порядка сложения вращений ω_1 и ω_2 .

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ:

1° Вращенія представляютъ собой сходящіеся векторы. Главный моментъ векторовъ ω_1 и ω_2 около любой точки M равенъ моменту ихъ результирующаго вектора ω (фиг. 50, 1°). Точка M въ моментъ t имѣетъ, слѣдовательно, такую скорость, какую эта точка имѣла бы, если бы тѣло S_2 обладало единственнымъ вращеніемъ $A\omega$.

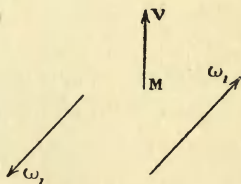
2° Пусть ω_1 и ω_2 будутъ два параллельныхъ вращенія, которыя не составляютъ пары; система этихъ двухъ векторовъ эквивалентна одному вектору $A\omega$ (фиг. 50, 2°), который получается по



Фиг. 50.

извѣстному правилу (п. 23). Главный моментъ векторовъ ω_1 и ω_2 около точки M равенъ моменту этого вектора $A\omega$. Слѣдовательно, скорости различныхъ точекъ тѣла S_2 все еще таковы, какъ-будто тѣло обладаетъ единственнымъ вращеніемъ ω .

3° Въ случаѣ, когда два вращенія образуютъ пару, главный моментъ равенъ осевому моменту пары, какова бы ни была точка M , а потому всѣ точки тѣла S_2 имѣютъ одну и ту же скорость. Скорости этихъ точекъ таковы же, какъ если бы тѣло S_2 обладало поступательнымъ движеніемъ со скоростью, равной оси пары (фиг. 51).

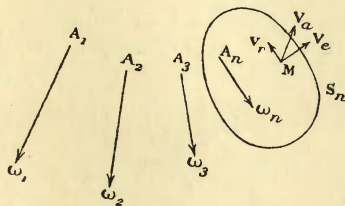


Фиг. 51.

Произвольное число вращеній. Вращенія и поступательныя движенія. — Разсмотримъ тѣло S_1 , обладающее вращеніемъ

$A_1\omega_1$; пусть это тѣло несетъ съ собой ось $A_2\omega_2$ и тѣло S_2 , относительное движеніе котораго по отношенію къ тѣлу S_1 есть вращеніе ω_2 ; пусть еще тѣло S_2 несетъ съ собой ось $A_3\omega_3$ и тѣло S_3 , относительное движеніе котораго по отношенію къ тѣлу S_2 есть вращеніе ω_3 , и такъ далѣе до тѣла S_n , которое имѣетъ вращеніе ω_n относительно тѣла S_{n-1} .

Для краткости мы будемъ говорить, что тѣло S_n обладаетъ одновременно вращеніями $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Найдемъ абсолютную скорость точки M , неизмѣнно связанной съ послѣднимъ твердымъ тѣломъ S_n . Эта скорость равна главному моменту системы векторовъ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ около точки M . Такъ какъ это предложеніе доказано для случая двухъ вращеній, то для доказательства въ общемъ случаѣ достаточно показать, что оно вѣрно также для n вращеній, если оно вѣрно для $(n-1)$ вращеній. Какъ намъ извѣстно, абсолютная скорость точки M тѣла S_n есть геометрическая сумма ея относительной скорости V_r по отношенію къ тѣлу S_{n-1} и ея переносной скорости V_e (фиг. 52). Относительная скорость точки M по отношенію къ тѣлу S_{n-1} есть скорость, обусловленная вращеніемъ ω_n , т. е. моментъ вектора ω_n около точки M ; переносная



Фиг. 52.

скорость точки M равна скорости, которую эта точка имѣла бы, если бы она была неизмѣнно связана съ тѣломъ S_{n-1} , т. е. равна главному моменту системы векторовъ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ около точки M_1 . Абсолютная скорость, равная геометрической суммѣ этихъ двухъ моментовъ, есть, слѣдовательно, главный моментъ системы векторовъ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ около точки M . Эта скорость не зависитъ отъ порядка вращеній.

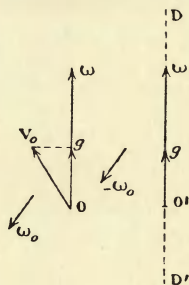
Задача о сложении вращеній съ поступательными движеніями приводится къ предыдущей, если замѣнимъ каждое поступательное перемѣщеніе парю вращеній.

Установивъ это, вообразимъ вторую систему векторовъ $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_p$, эквивалентную первой системѣ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ (п. 16). Обѣ системы вращеній, представленныхъ этими векторами, сообщаютъ точкѣ M одну и ту же скорость. Поэтому онѣ могутъ замѣнять одна другую въ тѣхъ случаяхъ, когда мы разсматриваемъ только скорости.

Отсюда вытекаютъ слѣдующія два наиболѣ важныя слѣдствія:

1° Система приложенныхъ векторовъ эквивалентна двумъ векторамъ, изъ которыхъ одинъ проходитъ черезъ произвольно выбранную точку; поэтому скорости точекъ тѣла S_n таковы же, какъ если бы тѣло обладало двумя вращеніями, одно изъ которыхъ проходитъ черезъ произвольно выбранную точку [Шаль (Chasles)].

2° Система приложенныхъ векторовъ эквивалентна одному вектору ω , проходящему черезъ произвольную точку O , и парѣ съ осевымъ моментомъ OV_0 ; поэтому точки тѣла S_n имѣютъ такія же скорости, какъ если бы это тѣло обладало однимъ лишь вращеніемъ $O\omega$, приложеннымъ къ произвольной точкѣ O , и одной парой вращеній съ осевымъ моментомъ OV_0 , т. е. поступательнымъ движеніемъ со скоростью OV_0 (фиг. 53).



Фиг. 53.

Съ измѣненіемъ точки O вращеніе $O\omega$ остается то же, поступательное же перемѣщеніе OV_0 измѣняется, но произведеніе $g = \overline{OV_0} \cos(\omega, V_0)$ остается постояннымъ.

Если прямая DD' есть центральная ось системы векторовъ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, то эта система эквивалентна одному вектору ω (вращенію), направленному по оси DD' , и парѣ съ наименьшимъ возможнымъ моментомъ g (поступательному вращенію), направленному также по оси DD' . Поэтому скорости точекъ тѣла S_n будутъ такими же, какими онѣ были бы, если бы оно обладало винто-

вымъ движеніемъ (п. 46); ось DD' есть мгновенная ось вращенія и скольженія.

Этотъ результатъ есть частный случай слѣдующей теоремы, относящейся къ самому общему движенію твердаго тѣла.

49. Распределение скоростей въ твердомъ тѣлѣ, обладающемъ произвольнымъ движеніемъ. Винтовое касательное движеніе. — Предположимъ, что твердое тѣло S движется относительно системы прямоугольных осей $O_1x_1y_1z_1$, которыя мы будемъ считать неподвижными. Для аналитическаго опредѣленія движенія вообразимъ второй ортогональный трехгранный уголъ $Oxyz$, неизмѣнно связанный съ тѣломъ S . Положеніе тѣла въ любой моментъ t будетъ намъ извѣстно, если будемъ знать положеніе подвижного трехграннаго угла $Oxyz$. Оба трехгранныхъ угла будутъ взяты въ прямомъ положеніи¹²⁾. Положеніе подвижного трехграннаго угла относительно неподвижнаго опредѣляется координатами (x_0, y_0, z_0) точки O относительно осей $O_1x_1y_1z_1$ и косинусами угловъ, которые оси Ox, Oy, Oz образуютъ съ тѣми же осями. Предположимъ, что эти косинусы заданы таблицей :

	x	y	z
x_1	α	α_1	α_2
y_1	β	β_1	β_2
z_1	γ	γ_1	γ_2

Если мы знаемъ координаты x_0, y_0, z_0 и девять косинусовъ въ функціи времени, то движеніе подвижного трехграннаго угла, а вмѣстѣ съ тѣмъ и движеніе тѣла опредѣлено.

Пусть M будетъ точка тѣла, имѣющая координаты x, y, z относительно подвижныхъ осей и координаты x_1, y_1, z_1 относительно неподвижныхъ осей. Числа x, y, z суть постоянныя, такъ какъ точка M неизмѣнно связана съ подвижными осями.

Формулы преобразованія координатъ даютъ намъ уравненія :

$$x_1 = x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z,$$

$$y_1 = y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z,$$

$$z_1 = z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z.$$

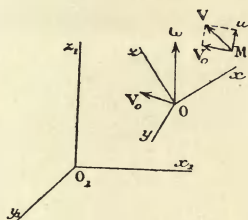
Дифференцируя эти выраженія по t , мы получимъ проекціи скорости V точки M (фиг. 54) на неподвижныя оси:

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + x \frac{da}{dt} + y \frac{da_1}{dt} + z \frac{da_2}{dt}, \\ V_{y_1} &= \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + x \frac{d\beta}{dt} + y \frac{d\beta_1}{dt} + z \frac{d\beta_2}{dt}, \\ V_{z_1} &= \frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + x \frac{d\gamma}{dt} + y \frac{d\gamma_1}{dt} + z \frac{d\gamma_2}{dt}. \end{aligned}$$

Этимъ формуламъ можно дать простую интерпретацію; для этой цѣли найдемъ проекціи скорости V на подвижныя оси; обозначивъ эти проекціи черезъ V_x , V_y , V_z , очевидно, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= a_1 V_{x_1} + \beta_1 V_{y_1} + \gamma_1 V_{z_1}, \\ V_y &= a_2 V_{x_1} + \beta_2 V_{y_1} + \gamma_2 V_{z_1}, \\ V_z &= a_3 V_{x_1} + \beta_3 V_{y_1} + \gamma_3 V_{z_1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Вычислимъ вторыя части этихъ равенствъ, замѣнивъ проекціи V_{x_1} , V_{y_1} , V_{z_1} написанными выше выраженіями. При этомъ мы произ-



Фиг. 54.

ведемъ упрощенія, пользуясь шестью элементарными соотношеніями, связывающими между собой девять косинусовъ a , β , γ , a_1 , β_1 , γ_1 , a_2 , β_2 , γ_2 . Напишемъ эти соотношенія:

$$\begin{aligned} \sum a^2 &= 1, & \sum a_1^2 &= 1, & \sum a_2^2 &= 1, \\ \sum a_1 a_2 &= 0, & \sum a_2 a &= 0, & \sum a a_1 &= 0, \end{aligned}$$

при чемъ знакъ $\sum$ обозначаетъ сумму трехъ членовъ: того, который написанъ подъ этимъ знакомъ, и двухъ, которые получаются изъ

этого члена путем круговых перестановок букв α, β, γ . Взявъ производныя по t , мы получимъ :

$$\sum \alpha \frac{da}{dt} = 0, \quad \sum \alpha_1 \frac{da_1}{dt} = 0, \quad \sum \alpha_2 \frac{da_2}{dt} = 0, \\ \sum (\alpha_2 \frac{da_1}{dt} + \alpha_1 \frac{da_2}{dt}) = 0. \quad \dots, \quad \dots$$

Сообразуясь съ этими послѣдними соотношеніями, мы положимъ :

$$\left. \begin{aligned} p &= \sum \alpha_2 \frac{da_1}{dt} = - \sum \alpha_1 \frac{da_2}{dt}, \\ q &= \sum \alpha \frac{da_2}{dt} = - \sum \alpha_2 \frac{da}{dt}, \\ r &= \sum \alpha_1 \frac{da}{dt} = - \sum \alpha \frac{da_1}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Теперь выраженія (1) проекцій V_x, V_y, V_z примутъ слѣдующій видъ

$$\left. \begin{aligned} V_x &= V_x^0 + qz - ry, \\ V_y &= V_y^0 + rx - pz, \\ V_z &= V_z^0 + py - qx, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

гдѣ V_x^0, V_y^0, V_z^0 обозначаютъ проекціи скорости V^0 точки O на подвижныя оси :

$$V_x^0 = \alpha \frac{dx_0}{dt} + \beta \frac{dy_0}{dt} + \gamma \frac{dz_0}{dt}, \quad \dots$$

Эти формулы имѣютъ простой смыслъ. Онѣ указываютъ, что скорость V каждой точки M твердаго тѣла есть геометрическая сумма двухъ векторовъ: вектора V^0 , одинаковаго для всѣхъ точекъ M , равнаго и параллельнаго скорости точки O , и другого вектора u , который измѣняется въ зависимости отъ положенія точки M и проекцій котораго на подвижныя оси равны $qz - ry, rx - pz, py - qx$. Векторъ V^0 есть скорость, которую имѣла бы точка M , если бы твердое тѣло обладало поступательнымъ движеніемъ со скоростью V^0 ; векторъ u есть скорость, которую имѣла бы та же точка, если бы твердое тѣло совершало вращеніе $O\omega$, проекціи котораго на подвижныя оси равны p, q, r ; это вращеніе называется мгновеннымъ. Чтобы выразить это, мы говоримъ, что скорость любой точки тѣла есть геометрическая сумма поступательной скорости, которая

равна скорости какой-либо точки O тѣла, и скорости вращения вокругъ оси, проходящей черезъ точку O .

Написанныя выше формулы (3) суть основныя формулы кинематики. Если движеніе твердаго тѣла дано, то шесть количествъ $V_x^0, V_y^0, V_z^0, p, q, r$ будутъ извѣстными функциями времени. Обратно, если эти количества даны въ функціи времени, то мы можемъ найти движеніе трехграннаго угла (см. Darboux, Leçons de Géométrie, т. I, гл. II, и Koenigs, Leçons de Cinématique, стр. 119).

Изъ полученнаго результата непосредственно выводятся составляющія скорости по неподвижнымъ осямъ O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 . Впрочемъ, проекціи V^0 на неподвижныя оси равны

$$\frac{dx_0}{dt}, \quad \frac{dy_0}{dt}, \quad \frac{dz_0}{dt};$$

затѣмъ, обозначивъ черезъ p_1, q_1, r_1 проекціи мгновеннаго вращения $O\omega$ на неподвижныя оси, мы по формуламъ, относящимся къ вращениямъ, получимъ для проекціи вектора u на ось O_1x_1 выраженіе:

$$q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0).$$

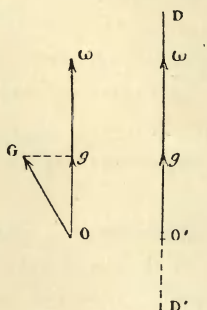
Проекція скорости V на ось Ox_1 равна, слѣдовательно,

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0);$$

аналогичныя двѣ формулы мы получимъ для проекцій V_{y_1} и V_{z_1} .

Мгновенная ось вращения и скольженія. (Мгновенная винтовая ось). Касательное винтовое движеніе. — Состояніе скоростей различныхъ точекъ твердаго тѣла таково, какъ если бы тѣло обладало вращеніемъ $O\omega$ и скольженіемъ OV^0 ; поэтому скорости таковы, какъ если бы тѣло обладало одновременно тремя вращениями: вращеніемъ $O\omega$ и двумя вращениями $\omega^0, -\omega^0$, составляющими пару съ осевымъ моментомъ OV^0 . Скорость любой точки тѣла M есть главный моментъ системы трехъ векторовъ $O\omega, \omega^0, -\omega^0$. Согласно изложенному въ теоріи сложения вращеній, состояніе скоростей будетъ такое же, какъ если бы тѣло обладало винтовымъ движеніемъ вокругъ центральной оси системы векторовъ $\omega, \omega^0, -\omega^0$; чтобы получить

уравнения этой оси, найдемъ геометрическое мѣсто точекъ, скорость которыхъ параллельна направлению мгновеннаго вращенія ω (фиг. 55).



Фиг. 55.

Мы получимъ слѣдующія уравненія мгновенной оси DD' вращенія и скольженія (такъ называемой мгновенной винтовой оси) относительно подвижныхъ осей:

$$(D) \quad \frac{V_x^0 + qz - ry}{p} = \frac{V_y^0 + rx - pz}{q} = \frac{V_z^0 + py - qx}{r}$$

относительно неподвижныхъ осей:

$$(D_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{dx_0}{dt} + q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0)}{p_1} \\ \\ = \frac{\frac{dy_0}{dt} + r_1(x_1 - x_0) - p_1(z_1 - z_0)}{q_1} = \dots; \end{array} \right.$$

введя величину g поступательнаго движенія, которая считается положительной въ направленіи оси ω , и обозначивъ черезъ h ходъ винтового движенія, мы найдемъ, что общее значеніе всѣхъ этихъ отношеній равно

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{g}{\omega} = \frac{pV_x^0 + qV_y^0 + rV_z^0}{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{p_1 \frac{dx_0}{dt} + q_1 \frac{dy_0}{dt} + r_1 \frac{dz_0}{dt}}{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}.$$

При этомъ могутъ представиться слѣдующіе частные случаи: если h есть нуль, то скольженія нѣтъ; если величина h бесконечно велика, то нѣтъ вращенія.

Определенное такимъ образомъ винтовое движеніе называется касательнымъ къ дѣйствительному движенію тѣла въ моментъ t , такъ какъ состояніе скоростей одно и то же въ обоихъ движеніяхъ; но нельзя сказать того же объ ускореніяхъ.

Мы могли бы также получить всѣ элементы этого касательнаго винтового движенія, отождествляя формулы, которыя даютъ величины V_x , V_y , V_z , съ тѣми, которыя даютъ проекціи скорости точки, обладающей винтовымъ движеніемъ (п. 46).

50. Непрерывное движеніе. — Геометрическое мѣсто мгновенной винтовой оси въ тѣлѣ есть нѣкоторая линейчатая поверхность Σ^{13} , уравненіе которой получается путемъ исключенія t изъ уравненій (D) оси относительно подвижныхъ координатныхъ осей; геометрическое мѣсто той же оси въ абсолютномъ пространствѣ, т. е. относительно неподвижныхъ осей, есть другая линейчатая поверхность Σ_1 , уравненіе которой получается при помощи уравненій (D_1) . Въ любой моментъ эти двѣ поверхности имѣютъ общую образующую, которая служитъ мгновенной осью въ этотъ моментъ. Кромѣ того, онѣ касаются вдоль этой образующей. Для доказательства представимъ себѣ движущуюся точку M , которая во всякій моментъ должна находиться на мгновенной оси. Абсолютное движеніе этой точки можно разсматривать, какъ результирующее ея относительнаго движенія по отношенію къ твердому тѣлу и переноснаго движенія, которымъ обладаетъ это тѣло. Относительная траекторія точки M расположена на поверхности Σ , абсолютная траекторія — на поверхности Σ_1 . Касательныя къ этимъ кривымъ въ точкѣ M направлены соответственно по относительной скорости V'_r и абсолютной скорости V'_a точки M , такъ что касательными плоскостями къ поверхностямъ Σ и Σ_1 въ точкѣ M служатъ плоскости (D, V'_r) и (D, V'_a) . Но $(V'_a) = (V'_r) + (V'_e)$, и переносная скорость V'_e направлена по мгновенной оси (D) , ибо точка M находится на мгновенной оси. Абсолютная скорость V'_a лежитъ, слѣдовательно, въ плоскости (D, V'_r) , и двѣ касательныя плоскости совпадаютъ.

Мы можемъ поэтому представить общее движеніе твердаго тѣла слѣдующимъ образомъ, какъ показалъ впервые Понселе (Poncelet):

Линейчатая поверхность, связанная съ твердымъ тѣломъ, движется по неподвижной линейчатой поверхности, касаясь послѣдней вдоль образующей ¹⁴).

51. Первый частный случай: Движеніе твердаго тѣла, имѣющаго одну неподвижную точку. — Вообразимъ твердое тѣло, которое движется такимъ образомъ, что одна изъ его точекъ остается неподвижной. Чтобы увидѣть, какъ упрощаются результаты, выведенные для общаго случая, возьмемъ неподвижную точку за начало двухъ трехгранныхъ координатныхъ угловъ; двѣ точки, которыя мы въ общемъ случаѣ обозначали черезъ O и O_1 , теперь совпадаютъ.

Такъ какъ скорость V^0 точки O равна нулю, то скорости различныхъ точекъ тѣла въ моментъ t таковы, какъ если бы тѣло вращалось вокругъ оси, проходящей черезъ неподвижную точку (Эйлеръ). Эта ось называется мгновенной осью вращенія.

Составляющія скорости точки, имѣющей координаты x, y, z , по подвижнымъ осямъ равны

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qx. \quad (4)$$

Такъ какъ мгновенная ось есть геометрическое мѣсто точекъ твердаго тѣла, скорость которыхъ въ каждый моментъ есть нуль, то относительно подвижныхъ осей она имѣетъ слѣдующія уравненія:

$$(D) \quad \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Этотъ результатъ легко, впрочемъ, вывести и изъ формулъ (D) (п. 49).

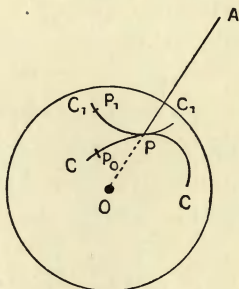
Замѣтимъ, что плоскость, проходящая черезъ мгновенную ось (D) и точку M твердаго тѣла, перпендикулярна къ скорости точки M . Поэтому нормальныя плоскости къ траекторіямъ различныхъ точекъ твердаго тѣла пересекаются въ каждый моментъ по одной прямой, а именно по мгновенной оси.

Непрерывное движеніе. — Линейчатая поверхности Σ, Σ_1 пункта 50, т. е. геометрическія мѣста мгновенной оси въ тѣлѣ и въ пространствѣ, въ данномъ случаѣ представляютъ собой два конуса съ общей вершиной въ точкѣ O . Докажемъ, что эти конусы катятся одинъ по другому.

Вообразимъ сферу, описанную изъ центра O радіусомъ R и неизмѣнно связанную съ твердымъ тѣломъ. Во время движенія эта

сфера движется, оставаясь въ совпаденіи съ неподвижной сферой, имѣющей тотъ же центр и тотъ же радіусъ.

Пусть точка P будетъ однимъ изъ слѣдовъ мгновенной оси вращенія на подвижной сферѣ (фиг. 56): эта точка описываетъ на



Фиг. 56.

подвижной сферѣ кривую C , неизмѣнно связанную съ этой сферой, т. е. съ твердымъ тѣломъ. Эта же самая точка P описываетъ на неподвижной сферѣ неподвижную кривую C_1 . Кривая C катится по кривой C_1 . Дѣйствительно, будемъ разсматривать точку P , какъ подвижную; ея абсолютная траекторія есть неподвижная кривая C_1 , и ея абсолютная скорость V'_a направлена по касательной къ C_1 и равна $\frac{ds_1}{dt}$, гдѣ s_1 обозначаетъ дугу кривой C_1 , считая отъ положенія P_1 точки P въ моментъ t_0 . Относительной траекторіей точки P по отношенію къ подвижному твердому тѣлу служитъ кривая C , и относительная скорость ея V'_r направлена по касательной къ кривой C и равна $\frac{ds}{dt}$, гдѣ s есть дуга кривой C , отсчитываемая отъ положенія P_0 , которое занимаетъ на этой кривой точка P въ моментъ t_0 . Переносная скорость V'_e точки P есть нуль, потому что эта точка P лежитъ на мгновенной оси вращенія. По теоремѣ, изложенной въ п. 47, мы имѣемъ, слѣдовательно, равенство:

$$\vec{V}'_a = \vec{V}'_r,$$

т. е. эти скорости равны по величинѣ и направленію и обращены въ одну сторону. Поэтому: 1° кривыя C_1 и C касаются въ точкѣ P ,

такъ какъ векторъ V'_a касается кривой V_1 и векторъ V'_r касается кривой C ; 2° мы имѣемъ уравненіе

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{ds}{dt},$$

откуда слѣдуетъ, что $s_1 = s$; константа здѣсь не нужна, такъ какъ значенія s и s_1 въ одинъ и тотъ же моментъ t_0 равны нулю; кривая C катится по кривой C_1 , такъ какъ дуги, описываемая на обѣихъ кривыхъ точкой касанія, равны между собой.

Эти свойства кривыхъ C и C_1 приводятъ непосредственно къ теоремѣ, которую мы желаемъ доказать: конусъ Σ , представляющій собой геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ тѣлѣ и имѣющій вершину O и направляющую C , катится по конусу Σ_1 , который есть геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ пространствѣ и имѣетъ вершину O и направляющую C_1 .

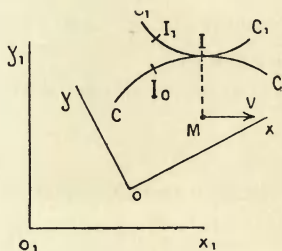
Къ этому именно свойству приводится въ данномъ случаѣ общая теорема Понселе (п. 50).

52. Второй частный случай. Движеніе твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости. Движеніе плоской фигуры, имѣющей неизмѣнную форму, въ ея плоскости. — Когда твердое тѣло перемѣщается параллельно неподвижной плоскости Π , всѣ точки тѣла, расположенныя въ извѣстный моментъ въ этой плоскости, остаются въ ней постоянно и образуютъ плоскую фигуру неизмѣнной формы, движущуюся по неподвижной плоскости. Когда твердое тѣло движется параллельно неподвижной плоскости, то изученіе его движенія приводится, слѣдовательно, къ изученію движенія плоской фигуры, имѣющей неизмѣнную форму и перемѣщающейся въ неподвижной плоскости Π . Этотъ случай можно разсматривать, какъ предѣльный случай движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки O , когда послѣдняя удаляется на безконечное разстояніе въ направленіи, перпендикулярномъ къ неподвижной плоскости Π . Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ твердое тѣло, которое принуждено двигаться вокругъ точки, разстоянія которой отъ различныхъ точекъ тѣла весьма велики въ сравненіи съ размѣрами тѣла; точки тѣла, расположенныя на постоянномъ весьма большомъ разстояніи R отъ неподвижной точки, остаются на сферѣ весьма большого радіуса, и малую часть этой сферы можно считать совпадающей съ

соотвѣтственной касательной плоскостью Π . Мы видимъ теперь, что выражаютъ въ данномъ случаѣ теоремы предыдущаго пункта. Въ каждый моментъ мгновенная ось вращения тѣла проходитъ черезъ центръ сферы; она, слѣдовательно, перпендикулярна къ плоскости Π . Конусы, которые служатъ геометрическими мѣстами мгновенныхъ осей въ тѣлѣ и въ пространствѣ, вблизи плоскости Π могутъ быть отождествлены съ цилиндрами, образующія которыхъ перпендикулярны къ плоскости Π . Движеніе тѣла получится, если катить цилиндръ, связанный съ тѣломъ, по неподвижному цилиндру.

Однако, въ виду важнаго значенія, которое имѣетъ этотъ частный случай, мы изучимъ его независимо отъ общаго случая.

Возьмемъ неподвижныя оси (фиг. 57) такимъ образомъ, что-



Фиг. 57.

бы неподвижная плоскость Π служила плоскостью $x_1O_1y_1$, и выберемъ подвижныя оси такъ, чтобы плоскость xOy двигалась, совпадая все время съ плоскостью $x_1O_1y_1$. Пусть θ будетъ уголъ, образуемый осью Ox съ осью O_1x_1 ; $x_0, y_0, 0$ суть координаты точки O . Количества θ, x_0, y_0 суть функции времени.

Пользуясь обозначеніями, введенными въ п. 49 для косинусовъ угловъ между подвижными и неподвижными осями, мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \theta, & \beta &= \sin \theta, & \gamma &= 0, \\ \alpha_1 &= -\sin \theta, & \beta_1 &= \cos \theta, & \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 &= 0, & \beta_2 &= 0, & \gamma_2 &= 1. \end{aligned}$$

Количества p, q, r [п. 49, формулы (2)] имѣютъ слѣдующія значенія:

$$p = \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} = 0, \quad q = \sum \alpha \frac{d\alpha_2}{dt} = 0, \quad r = \sum \alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt};$$

отсюда, слѣдуетъ, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

Далѣе, $V_z^0 = 0$. Формулы скорости получаютъ слѣдующій видъ:

$$V_x = V_x^0 - \omega y, \quad V_y = V_y^0 + \omega x, \quad V_z = 0, \quad (5)$$

послѣдняя изъ этихъ формулъ очевидна сама собой.

Эти выражения легко также получить непосредственно. Формулы преобразованія осей координатъ въ плоскости даютъ намъ слѣдующія уравненія:

$$x_1 = x_0 + x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y_1 = y_0 + x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z_1 = z.$$

Когда тѣло перемѣщается, координаты x , y , z любой изъ его точекъ относительно подвижныхъ осей постоянны, и для проекцій скорости точки на неподвижныя оси мы получимъ выраженія:

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - (x \sin \theta + y \cos \theta) \omega, \\ V_{y_1} &= \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (x \cos \theta - y \sin \theta) \omega, \\ V_{z_1} &= \frac{dz_1}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Проекціи скорости той же точки на подвижныя оси равны:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x_1} \cos \theta + V_{y_1} \sin \theta, \\ V_y &= -V_{x_1} \sin \theta + V_{y_1} \cos \theta, \\ V_z &= V_{z_1} = 0; \end{aligned}$$

обозначая черезъ V_x^0 и V_y^0 проекціи скорости точки O на подвижныя оси, мы получимъ, наконецъ, уравненія

$$V_x = V_x^0 - \omega y, \quad V_y = V_y^0 + \omega x, \quad V_z = 0,$$

т. е. выражения (5).

Точка, скорость которой равна нулю. Разсмотримъ въ плоскости xu точку I , координаты которой относительно подвижныхъ осей равны x' , y' и опредѣляются уравненіями

$$V_x^0 - \omega y' = 0, \quad V_y^0 + \omega x' = 0; \quad (6)$$

точка тѣла, находящаяся въ моментъ t въ I , имѣетъ скорость нуль. Всѣ точки оси Iz' , проведенной черезъ точку I перпендикулярно къ неподвижной плоскости, обладаютъ тѣмъ же свойствомъ.

Мгновенная ось вращенія. — Введя координаты x' , y' точки I , мы можемъ написать выраженія (5) въ слѣдующемъ видѣ:

$$V_x = -\omega(y - y'), \quad V_y = \omega(x - x'), \quad V_z = 0.$$

Различныя точки тѣла въ моментъ t имѣютъ, слѣдовательно, такую скорость, какъ если бы тѣло вращалось вокругъ оси Iz' съ угловой скоростью ω (п. 45). Эта прямая Iz' есть мгновенная ось вращенія тѣла въ моментъ t .

Мгновенный центръ вращенія. — Если мы будемъ въ частности разсматривать только плоскую фигуру, которая движется въ плоскости x_1Oy_1 , то скорости различныхъ точекъ этой фигуры въ моментъ t будутъ такими же, какими онѣ были бы, если бы фигура вращалась вокругъ точки I съ угловой скоростью ω . Эта точка называется мгновеннымъ центромъ вращенія плоской фигуры. Отсюда вытекаетъ слѣдующая геометрическая теорема.

Въ любой моментъ t нормали къ траекторіямъ различныхъ точекъ плоской фигуры сходятся въ мгновенномъ центрѣ I . Дѣйствительно, векторъ-скорость V точки M плоской фигуры перпендикуляренъ къ IM и, съ другой стороны, онъ есть касательная къ траекторіи точки M .

Непрерывное движеніе. — Геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей Iz' въ твердомъ тѣлѣ есть цилиндръ Σ ; его образующія перпендикулярны къ плоскости xOy , а направляющей служитъ плоская кривая C , геометрическое мѣсто мгновеннаго центра I относительно осей xOy . Геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей Iz' относительно неподвижныхъ осей $O_1x_1y_1z_1$ тоже есть цилиндръ Σ_1 ; его образующія перпендикулярны къ плоскости $x_1O_1y_1$, а направляющая есть плоская кривая C_1 , геометрическое мѣсто мгновеннаго центра I относительно осей $x_1O_1y_1$.

Можно получить непрерывное движеніе тѣла, если катить цилиндръ Σ , связанный съ тѣломъ, по неподвижному цилиндру Σ_1 . Для доказательства достаточно показать, что кривая C катится по кривой C_1 . Будемъ разсматривать точку I , какъ движущуюся, и абсолютное

движеніе этой точки будемъ разсматривать, какъ результатъ геометрическаго сложенія двухъ движеній: движенія точки I относительно тѣла xOy и переноснаго движенія тѣла. Относительной траекторіей точки I служитъ кривая C , абсолютной траекторіей — кривая C_1 . Относительная скорость V'_r точки I есть касательная къ кривой C и равна $\frac{ds}{dt}$, гдѣ s обозначаетъ дугу кривой C , описываемую точкой I , начиная отъ момента t_0 . Абсолютная скорость V'_a точки I есть касательная къ кривой C_1 и равна $\frac{ds_1}{dt}$, гдѣ s_1 обозначаетъ дугу кривой C_1 , описываемую точкой I , начиная отъ момента t_0 . Переносная скорость V'_e точки I въ движеніи твердаго тѣла равна нулю. Слѣдовательно, по теоремѣ п. 47 абсолютная и относительная скорости, равны по величинѣ и направленію и обращены въ одну сторону:

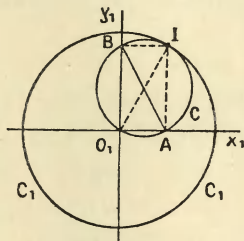
$$\vec{V}'_a = \vec{V}'_r.$$

Такимъ образомъ, кривая C и C_1 въ моментъ t касаются одна другой въ точкѣ I . Далѣе,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds_1}{dt}, \quad s = s_1;$$

константа здѣсь не нужна, такъ какъ въ моментъ t_0 переменныя s и s_1 обѣ равны нулю. Такъ какъ соотвѣтственные дуги двухъ кривыхъ C и C_1 равны, то кривая C катится безъ скольженія по кривой C_1 . Цилиндръ Σ катится, слѣдовательно, по цилиндру Σ_1 ; къ этому сводится въ разсматриваемомъ случаѣ общая теорема Понселе (п. 50).

Примѣры. — 1° Прямая AB , имѣющая постоянную длину (фиг. 58), движется такимъ образомъ, что ея концы A и B сколь-

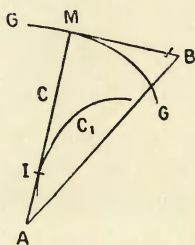


Фиг. 58.

зять по двумъ неподвижнымъ прямоугольнымъ осямъ O_1x_1 y_1 . Предположимъ, что эта прямая въ своемъ движеніи увлекаетъ за собою пло-

скость S , скользящую по плоскости $x_1O_1y_1$. Мгновеннымъ центромъ I въ каждый моментъ будетъ точка пересѣченія нормалей, возставленныхъ къ осямъ O_1x_1 и O_1y_1 изъ точекъ A и B ; слѣдовательно, геометрическое мѣсто точки I въ неподвижной плоскости есть окружность C_1 съ центромъ O и радиусомъ, равнымъ AB , ибо $OM = AB = \text{const.}$; геометрическое мѣсто точки I относительно прямой AB есть окружность, построенная на отрезкѣ AB , какъ діаметръ; можно получить рассматриваемое движеніе, если заставить кривую C катиться по кривой C_1 .

2° Дана неподвижная плоская кривая G въ плоскости $x_1O_1y_1$; неизмѣняемый прямоугольный треугольникъ AMB движется въ плоскости $x_1O_1y_1$ такимъ образомъ, что точка M описываетъ кривую G и катетъ MA постоянно служитъ нормалью этой кривой (фиг. 59).



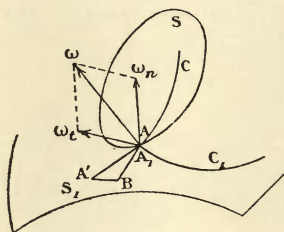
Фиг. 59.

Легко доказать, что мгновенный центръ движущейся фигуры AMB при этихъ условіяхъ есть центръ кривизны I кривой G въ точкѣ M : точка I описываетъ въ неподвижной плоскости $x_1O_1y_1$ кривую C_1 , которая служитъ разверткой кривой G , а въ подвижной плоскости AMB прямую MA . Можно получить рассматриваемое движеніе, если заставить прямую MA катиться безъ скольженія по эволютѣ C_1 .

53. Третій частный случай. Каченіе и верченіе (pivotement) движущейся поверхности по неподвижной. — Представимъ себѣ, что движущееся твердое тѣло, ограниченное неизмѣняемой поверхностью S , должно оставаться въ соприкосновеніи съ неподвижной поверхностью S_1 (фиг. 60). Въ каждый моментъ t нѣкоторая точка A движущейся поверхности S совпадаетъ съ точкой A_1 неподвижной поверхности S_1 . Если въ моментъ t скорость V_0 этой точки A , принадлежащей поверхности S , не равна нулю,

то эта скорость лежитъ въ плоскости, которая касается обѣихъ поверхностей въ ихъ точкѣ касанія. Дѣйствительно, если B есть точка касанія въ моментъ $t+dt$ и A' есть новое положеніе точки A , то векторы BA_1 и BA' находятся въ общей касательной плоскости, проведенной къ обѣимъ поверхностямъ черезъ точку B , и въ этой же плоскости находится векторъ AA' , представляющій абсолютное перемѣщеніе точки A . Скорости различныхъ точекъ движущагося твердаго тѣла таковы, какъ если бы это тѣло имѣло поступательное движеніе со скоростью V_0 и вращательное движеніе $A\omega$ вокругъ оси, проходящей черезъ точку A .

Говорятъ, что поверхность S катится и вертится на поверхности S_1 , если въ каждый моментъ t скорость точки A , въ которой касаются эти поверхности, есть нуль.



Фиг. 60.

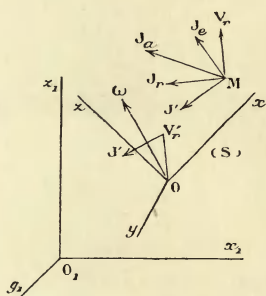
Такъ какъ въ этомъ случаѣ скорость V_0 равна нулю, то скорости точекъ движущагося твердаго тѣла въ каждый моментъ таковы, каковы онѣ были бы, если бы тѣло обладало вращеніемъ $A\omega$ вокругъ оси, проходящей черезъ точку A : мгновенная винтовая ось проходитъ, слѣдовательно, черезъ точку A , и скольженія нѣтъ. Геометрическимъ мѣстомъ оси $A\omega$ въ тѣлѣ S служитъ линейчатая поверхность Σ , а въ абсолютномъ пространствѣ — линейчатая поверхность Σ_1 ; можно получить рассматриваемое движеніе тѣла, катя поверхность S по поверхности Σ_1 . Геометрическое мѣсто точки A на поверхности S есть кривая C , линия пересѣченія поверхностей Σ и S ; геометрическимъ мѣстомъ точки A_1 на поверхности S_1 служитъ кривая C_1 , линия пересѣченія поверхностей Σ_1 и S_1 ; эти двѣ кривыя также катятся одна по другой. Мгновенное вращеніе $A\omega$ можетъ быть разложено на два: одно $A\omega^n$, нормальное къ двумъ по-

верхностямъ и называемое угловой скоростью верченія, другое $A\omega$, лежащее въ касательной плоскости и называемое угловой скоростью каченія. Если скорость вращения ω_n постоянно равна нулю, то движеніе поверхности S по S_1 сводится къ каченію.

V. — УСКОРЕНИЕ ВЪ ОТНОСИТЕЛЬНОМЪ ДВИЖЕНІИ.

54. Теорема Кориолиса. (Coriolis). — Выше (п. 47) мы дали теорему, выражающую связь между абсолютной скоростью движущагося тѣла и его относительной скоростью по отношенію къ неизмѣняемой системѣ (S) , движеніе которой извѣстно.

Теперь мы займемся теоремой такого же рода, связывающей абсолютное ускореніе съ относительнымъ. Мы примѣнимъ для этого



Фиг. 61.

аналитическій методъ, который приведетъ насъ также къ теоремѣ о скоростяхъ, доказанной раньше геометрическимъ способомъ (п. 47).

Чтобы опредѣлить движеніе системы сравненія (S) по отношенію къ которой разсматривается относительное движеніе, мы возьмемъ три подвижныя оси $Oxuz$ (фиг. 61), неизмѣнно связанныя съ системой (S) и опредѣлимъ ихъ движеніе такъ же, какъ и въ п. 49. Пусть M будетъ движущаяся точка: такъ какъ она перемѣщается одновременно въ системѣ (S) и въ абсолютномъ пространствѣ, связанномъ съ неподвижными осями $O_1x_1y_1z_1$, то координаты этой точки относительно подвижныхъ осей x, y, z будутъ

функциями времени такъ же, какъ и абсолютныя ея координаты x_1, y_1, z_1 . Эти координаты связаны формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ y_1 &= y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ z_1 &= z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Движущаяся точка M имѣетъ абсолютную скорость и абсолютное ускореніе, проекціи которыхъ на неподвижныя оси равны

$$\begin{aligned} (V_a) \quad & \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt}, \\ (J_a) \quad & \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2}. \end{aligned}$$

Проекціи относительной скорости точки и ея относительнаго ускоренія на подвижныя оси равны соответственно:

$$\begin{aligned} (V_r) \quad & \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \\ (J_r) \quad & \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}$$

а проекціи на неподвижныя оси равны соответственно:

$$(V_r) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha \frac{dx}{dt} + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_2 \frac{dz}{dt}, \\ & \beta \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{dz}{dt}, \\ & \gamma \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{dz}{dt}, \end{aligned} \right.$$

$$(J_r) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2z}{dt^2}, \\ & \beta \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2z}{dt^2}, \\ & \gamma \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

Разсматриваемая точка имѣетъ также переносную скорость и переносное ускореніе, проекціи которыхъ на оси соотвѣтственно равны :

$$(V_e) \quad \begin{cases} \frac{dx_0}{dt} + x \frac{da}{dt} + y \frac{da_1}{dt} + z \frac{da_2}{dt}, \\ \frac{dy_0}{dt} + x \frac{d\beta}{dt} + y \frac{d\beta_1}{dt} + z \frac{d\beta_2}{dt}, \\ \frac{dz_0}{dt} + x \frac{d\gamma}{dt} + y \frac{d\gamma_1}{dt} + z \frac{d\gamma_2}{dt}, \end{cases}$$

$$(J_e) \quad \begin{cases} \frac{d^2x_0}{dt^2} + x \frac{d^2a}{dt^2} + y \frac{d^2a_1}{dt^2} + z \frac{d^2a_2}{dt^2}, \\ \frac{d^2y_0}{dt^2} + x \frac{d^2\beta}{dt^2} + y \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + z \frac{d^2\beta_2}{dt^2}, \\ \frac{d^2z_0}{dt^2} + x \frac{d^2\gamma}{dt^2} + y \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + z \frac{d^2\gamma_2}{dt^2}. \end{cases}$$

При полученіи этихъ формулъ координаты x, y, z разсматриваются, какъ постоянныя, потому что переносной скоростью и переноснымъ ускореніемъ точки M называются скорость и ускореніе, которыя имѣла бы точка, если бы она была неизмѣнно связана съ подвижными осями.

Дифференцируя одинъ разъ формулы (1) по t , мы получимъ аналитическое выраженіе теоремы, доказанной нами выше (п. 47): абсолютная скорость есть геометрическая сумма относительной скорости и переносной.

Второе дифференцированіе формулъ (1) даетъ формулу :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} = & \left(a \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{d^2y}{dt^2} + a_2 \frac{d^2z}{dt^2} \right) \\ & + \left(\frac{d^2x_0}{dt^2} + x \frac{d^2a}{dt^2} + y \frac{d^2a_1}{dt^2} + z \frac{d^2a_2}{dt^2} \right) \\ & + 2 \left(\frac{da}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{da_1}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{da_2}{dt} \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и двѣ аналогичныя ей формулы для вторыхъ производныхъ координатъ y_1 и z_1 .

Для интерпретаціи этихъ равенствъ разсмотримъ векторъ J' , началомъ котораго служить точка M , а проекціями на неподвижныя оси — количества

$$(J') \quad \begin{cases} J'_{x_1} = 2 \left(\frac{da}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{da_1}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{da_2}{dt} \frac{dz}{dt} \right), \\ J'_{y_1} = 2 \left(\frac{d\beta}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt} \frac{dz}{dt} \right), \\ J'_{z_1} = 2 \left(\frac{d\gamma}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{d\gamma_1}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt} \frac{dz}{dt} \right). \end{cases}$$

Этот векторъ называется дополнительнымъ ускореніемъ. Уравненія (2) выражаютъ, что проекція абсолютнаго ускоренія J_a на каждую изъ трехъ неподвижныхъ осей равна суммѣ проекцій на соответствующую ось ускореній J_r, J_e, J' , т. е., въ пространствѣ, векторъ J_a есть геометрическая сумма векторовъ J_r, J_e и J' .

Итакъ, абсолютное ускореніе есть геометрическая сумма относительнаго ускоренія, переноснаго ускоренія и дополнительнаго ускоренія.

Остается найти простую интерпретацію ускоренія J' . Съ этой цѣлью найдемъ проекціи J'_x, J'_y, J'_z вектора J' на подвижныя оси. Очевидно, что

$$J'_x = \alpha J'_{x_1} + \beta J'_{y_1} + \gamma J'_{z_1}, \quad (3)$$

.....

Система сравненія (S), по отношенію къ которой мы изучаемъ относительное движеніе, есть движущееся твердое тѣло. Согласно изложенному нами выше, различныя точки этого твердаго тѣла (S) въ моментъ t имѣютъ такія же скорости, какъ если бы твердое тѣло обладало нѣкоторымъ поступательнымъ движеніемъ и мгновеннымъ вращеніемъ ω , проекціями котораго на подвижныя оси служатъ три количества p, q, r , опредѣляемые формулами

$$p = \sum \alpha_1 \frac{da_1}{dt} = - \sum \alpha_1 \frac{da_2}{dt}, \quad \dots, \quad \dots;$$

поэтому, подставивъ въ формулы (3) вмѣсто J'_x, J'_y, J'_z ихъ значенія изъ равенствъ (J'), мы получимъ слѣдующія формулы:

$$J'_x = 2 \left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right),$$

$$J'_y = 2 \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right),$$

$$J'_z = 2 \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right).$$

Разсмотримъ точку V'_r (фиг. 61), координатами которой относительно подвижныхъ осей служатъ количества $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, т. е. конецъ вектора OV'_r , который, имѣя начало въ точкѣ O , равенъ и параллеленъ относительной скорости V_r . Проекція вектора J' на оси x, y, z равны удвоеннымъ проекціямъ скорости, которую получила бы эта точка V'_r , если бы уголъ $\omega OV'_r$, оставаясь постоян-

нымъ, вращался вокругъ оси $O\omega$ съ угловою скоростью ω , въ предположеніи, что ось остается неподвигной. Векторъ J' по величинѣ и направленію равенъ, слѣдовательно, этой скорости, увеличенной вдвое, т. е. векторъ J' равенъ удвоенному моменту вектора ω около точки V'_r приложенъ къ точкѣ M . Подробнѣе его можно и опредѣлить слѣдующимъ образомъ: векторъ J' перпендикуляренъ къ плоскости $\omega OV'_r$, проведенной черезъ мгновенную ось и относительную скорость; величина его равна удвоенному произведенію вектора ω на разстояніе точки V'_r отъ оси $O\omega$, т. е. произведенію $2\omega V_r \sin(\omega, V_r)$; наконецъ, онъ направленъ относительно плоскости $\omega OV'_r$ въ ту сторону, куда мгновенное вращеніе ω стремилось бы повернуть конецъ V'_r отръзка OV'_r , параллельнаго относительной скорости.

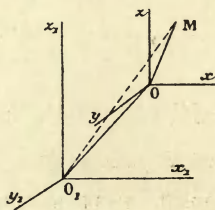
Итакъ, мы имѣемъ слѣдующія соотношенія:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e, \quad \vec{J}_a = \vec{J}_r + \vec{J}_e + \vec{J}'.$$

Векторъ J' равенъ нулю, если одинъ изъ трехъ множителей ω , V_r , $\sin(\omega, V_r)$ есть нуль. Простѣйшимъ случаемъ является слѣдующій:

55. Поступательное движеніе подвижныхъ осей. Сложеніе движеній.—Если векторъ ω постоянно равенъ нулю, то мгновенное вращеніе постоянно равно нулю. Для этого необходимо и достаточно, чтобы подвижныя оси имѣли поступательное движеніе; абсолютное ускореніе J_a есть тогда геометрическая сумма относительнаго ускоренія J_r и переноснаго ускоренія J_e .

Этотъ частный случай относительнаго движенія называется сложеніемъ движеній. Чтобы опредѣлить поступательное движе-

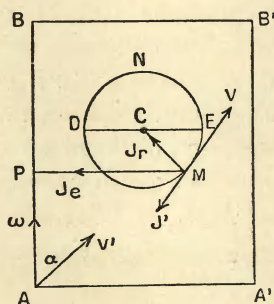


Фиг. 62.

ніе подвижныхъ осей, которыя мы можемъ въ этомъ случаѣ считать параллельными неподвигнымъ осямъ (фиг. 62), очевидно, до-

статочно опредѣлить движеніе одной точки O системы сравненія это можно сдѣлать, давъ измѣненіе вектора O_1O въ функции времени; точно такъ же относительное движеніе точки M опредѣляется измѣненіемъ вектора OM . Абсолютное движеніе точки M , опредѣляемое измѣненіемъ результирующаго вектора O_1M , называется результирующимъ двухъ первыхъ движеній; согласно изложенному нами выше, скорость и ускореніе этого движенія представляютъ собой геометрическія суммы скоростей и ускореній двухъ составляющихъ движеній.

56. Примѣры. — 1° Предположимъ, что плоская дверь $ABA'B'$ (фиг. 63) вращается съ угловой скоростью ω вокругъ оси AB . На двери начерчена окружность, имѣющая центръ въ точкѣ C и радиусъ a ; предположимъ, что наѣзкомое M движется на двери по этой



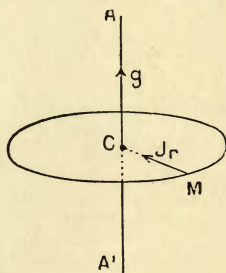
Фиг. 63.

окружности съ постоянной скоростью V . Требуется опредѣлить абсолютное ускореніе наѣзкомаго M . Системой сравненія (S) служить дверь. По отношенію къ двери наѣзкомое имѣетъ относительное ускореніе $J_r = \frac{V^2}{a}$, направленное по радиусу MC . Переносное ускореніе есть ускореніе, которымъ обладаетъ та точка двери, въ которой находится M : эта точка описываетъ съ угловой скоростью ω окружность, радиусомъ которой служитъ разстояніе MP точки отъ оси и плоскость которой перпендикулярна къ оси; поэтому ускореніе J_e этой точки равно $\omega^2 \cdot MP$ и направлено по радиусу MP . Остается опредѣлить дополнительное ускореніе J' . Мгновеннымъ вращеніемъ системы сравненія (S) является вращеніе $A\omega$ двери; относительная скорость V_r движущейся точки есть векторъ MV ,

имѣющей величину V и касательный къ окружности C . Ускореніе J' , будучи перпендикулярно къ плоскости двухъ прямыхъ $A\omega$ и V , перпендикулярно къ плоскости двери; оно равно $2\omega V \sin \alpha$, гдѣ α есть уголъ $\omega AV'$, образуемый мгновенной осью $A\omega$ и векторомъ AV' , геометрически равнымъ относительной скорости MV ; наконецъ, относительно плоскости двери ускореніе обращено въ ту сторону, куда увлекается конецъ вектора AV' вращеніемъ $A\omega$. На фигурѣ точка V' переносится по направленію отъ плоскости чертежа впередъ; въ эту сторону долженъ быть возставленъ перпендикуляръ MJ' ; это будетъ такъ, пока движущійся предметъ M находится въ нижней части DME окружности C ; когда онъ описываетъ верхнюю часть END , ускореніе J' должно быть построено съ другой стороны двери. Въ точкахъ D и E ускореніе равно нулю, такъ какъ въ этихъ точкахъ $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$.

2° Окружность постояннаго радіуса R совершаетъ со скоростью g прямолинейное и равномерное поступательное движеніе, при которомъ ея центръ C описываетъ неподвижную прямую $A'A$, перпендикулярную къ плоскости окружности. Въ то же время движущаяся точка M пробѣгаетъ окружность съ постоянной угловой скоростью ω . Требуется найти абсолютное ускореніе точки M (фиг. 64).

Мы замѣчаемъ, что точка M обладаетъ равномернымъ винтовымъ движеніемъ съ поступательной скоростью g и вращательной



Фиг. 64.

скоростью ω . Ея относительное ускореніе по отношенію къ окружности есть векторъ $MJ_r = \omega^2 R$, направленный къ центру C ; ея переносное ускореніе равно нулю, такъ какъ система сравненія (подвижная окружность) обладаетъ равномернымъ и прямолинейнымъ поступательнымъ движеніемъ; ея дополнительное ускореніе также

равно нулю, потому что движеніе системы сравненія — поступательное. Мы имѣемъ, слѣдовательно, геометрическое равенство

$$\vec{J}_a = \vec{J}_r$$

Это абсолютное ускореніе точки M , будучи направлено къ центру движущейся окружности, нормально къ цилиндру вращенія, который описывается движущейся окружностью и на которомъ лежитъ винтовая линія — геометрическое мѣсто точки M . Такъ какъ ускореніе движущейся точки лежитъ въ соприкасающейся плоскости ея траекторіи, то соприкасающаяся плоскость къ винтовой линіи въ каждой точкѣ нормальна къ цилиндру, на которомъ лежитъ эта линія.



ГЛАВА III.

ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ: МАССА, СИЛА, РАБОТА.

Механика основывается на небольшомъ числѣ принциповъ, которые невозможно провѣрить непосредственно; наука пришла къ нимъ путемъ длиннаго ряда индукцій: слѣдствія, вытекающія изъ этихъ принциповъ, подтверждаются наблюденіемъ. Первая идея этихъ принциповъ принадлежитъ еще Галилею, который ввелъ при изученіи законовъ паденія тѣлъ (наклонная плоскость, маятникъ, параболическое движеніе) понятія объ инерціи, ускореніи, сложеніи движеній. Гюйгенсъ явился продолжателемъ Галилея въ теоріи движенія точки; наконецъ, Ньютонъ расширилъ область механики, открывъ законъ всемірнаго тяготѣнія.

I. — ПРИНЦИПЫ.

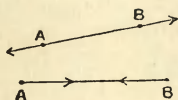
57. Неподвижныя оси. — Въ кинематикѣ система осей, разсматриваемыхъ, какъ неподвижныя, выбиралась нами произвольно. Это не имѣетъ мѣста въ механикѣ, такъ какъ принципы, изложеніемъ которыхъ мы сейчасъ займемся, вѣрны лишь при частномъ выборѣ осей. Положенія всѣхъ тѣлъ относятъ къ системѣ осей, которыя по опредѣленію называются абсолютно неподвижными осями; эта система осей представляетъ собой трехгранный уголь, вершина котораго находится въ центрѣ тяжести солнечной системы (приблизительно въ центрѣ солнца), а ребра направлены къ тремъ звѣздамъ, которыя называются неподвижными звѣздами.

58. Матеріальная точка. — Чтобы начать съ наиболѣе простой задачи, мы сперва будемъ изучать движеніе частицы матеріи, настолько малой, чтобы можно было безъ чувствительной ошибки опредѣлять ея положеніе такъ, какъ опредѣляется положеніе геометрической точки. Такая частица матеріи называется матеріальной точкой. Затѣмъ мы будемъ разсматривать тѣла, какъ состоящія изъ соединенія очень большого числа матеріальныхъ точекъ.

59. Принципы: Первый принципъ. — Всякая матеріальная точка не будетъ имѣть ускоренія, если допустить, что она единственная.

Этотъ принципъ можно также выразить слѣдующимъ образомъ: матеріальная точка, которая разсматривается, какъ единственная, имѣетъ относительно неподвижныхъ осей равномерное прямолинейное движеніе (которое можетъ быть нулемъ). Этотъ принципъ извѣстенъ подъ названіемъ принципа инерціи.

Второй принципъ. — Двѣ матеріальныя точки, обладающія произвольными скоростями, опредѣляютъ одна въ другой ускоренія, направленныя по соединяющей ихъ прямой въ противоположныя стороны [см. обѣ приложенныя фигуры (фиг. 65)]. Изученіе условий,



Фиг. 65.

при которыхъ порождаются эти ускоренія, составляетъ часть опытной физики: ускореніе можетъ обусловливаться тѣмъ, что точки наэлектризованы, или давленіемъ ихъ другъ на друга, или Ньютоновскимъ притяженіемъ и т. д.

Третій принципъ. — Отношеніе численныхъ значеній ускореній, которыя двѣ какія-либо матеріальныя точки *A* и *B* опредѣляютъ одна въ другой, есть величина постоянная; иначе говоря, это отношеніе остается неизмѣннымъ, каковы бы ни были физическія условія, порождающія ускореніе, будетъ ли то электризація, взаимное давленіе, Ньютоновское притяженіе и т. д.

Въ силу этого мы можемъ выразить отношеніе ускоренія точки B къ ускоренію точки A дробью, числителемъ которой служить произвольно выбранное число, которое мы обозначимъ символомъ m_A , а знаменателемъ — другое число m_B , зависящее исключительно отъ природы точекъ A и B . Мы имѣемъ, такимъ образомъ, равенство :

$$\frac{\text{ускореніе точки } B}{\text{ускореніе точки } A} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Если мы теперь возьмемъ вмѣстѣ съ точкой A не точку B , но другую матеріальную точку C , то опять можно будетъ выразить отношеніе ускореній точки C и точки A дробью, числителемъ которой служить выбранное уже число m_A , а знаменателемъ другое число m_C , характерное для совокупности точекъ A и C . Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть также равенство :

$$\frac{\text{ускореніе точки } C}{\text{ускореніе точки } A} = \frac{m_A}{m_C}.$$

Сказанное относится ко всѣмъ точкамъ $D, E, F, \dots$, которыя мы могли бы брать вмѣстѣ съ точкой A : для каждой изъ этихъ точекъ мы имѣемъ особый знаменатель $m_D, m_E, m_F, \dots$.

Составимъ таблицу чиселъ $m_A, m_B, \dots$, опредѣленныхъ только-что указаннымъ образомъ :

$$m_A, m_B, m_C, \dots, m_K, \dots$$

Эта таблица даетъ намъ возможность отвѣтить на слѣдующій вопросъ: дана точка A и вмѣстѣ съ ней какая-либо другая точка K ; требуется найти отношеніе ускореній, которыя онѣ опредѣляютъ одна въ другой. Для рѣшенія этого вопроса нужно лишь написать равенство

$$\frac{\text{ускореніе точки } K}{\text{ускореніе точки } A} = \frac{m_A}{m_K}.$$

Мало того, благодаря слѣдующему предложенію, которымъ дополняется третій принципъ, эта таблица можетъ служить намъ для рѣшенія задачи гораздо болѣе общаго типа.

Отношеніе ускореній, которыя двѣ произвольныя точки P и Q опредѣляютъ одна въ другой, равно отношенію ускореній точки P и другой какой-либо точки, — напримѣръ, A , — дѣленному на отношеніе ускореній точки Q и точки A ; это можно написать такъ:

$$\text{Отношеніе ускореній точекъ } P \text{ и } Q = \frac{\text{отн. ускор. точекъ } P \text{ и } A}{\text{отн. ускор. точекъ } Q \text{ и } A} = \frac{m_Q}{m_P}.$$

Такимъ образомъ, таблица чиселъ $m_A, m_B, \dots$ даетъ намъ возможность отвѣтить на слѣдующій вопросъ: найти отношеніе ускореній двухъ произвольныхъ матеріальныхъ точекъ. Это отношеніе равно обратному отношенію соотвѣтственныхъ чиселъ m таблицы. Нетрудно замѣтить аналогію между свойствами этой таблицы и свойствами таблицы химическихъ эквивалентовъ.

Опредѣленіе. — Числа $m_A, m_B, m_C, \dots$ называются массами точекъ $A, B, C, \dots$.

Подведемъ итогъ сказанному: отношеніе массъ двухъ точекъ равно, по опредѣленію, обратному отношенію ускореній, которое каждая изъ нихъ опредѣляетъ въ другой; если выбрать произвольно численное значеніе одной изъ массъ, то всѣ другія будутъ имѣть опредѣленные значенія.

Четвертый принципъ. — Ускореніе, опредѣляемое въ какой-либо матеріальной точкѣ M совокупностью нѣсколькихъ матеріальныхъ системъ $S_1, S_2, S_3, \dots$, получается по правилу сложения векторовъ путемъ сложения ускореній, которыя опредѣляли бы отдѣльно взятая системы $S_1, S_2, S_3, \dots$, дѣйствуя послѣдовательно на точку M .

Эти факты строго вѣрны лишь для абсолютныхъ движеній, отнесенныхъ къ упомянутой нами системѣ неподвижныхъ осей. Однако, только въ астрономіи или нѣкоторыхъ совершенно исключительныхъ опытахъ (напримѣръ, въ опытѣ съ маятникомъ Фуко) мы имѣемъ надобность пользоваться этой системой осей. Въ огромномъ большинствѣ случаевъ дозволяется взять систему осей, связанную съ землей; если принять во вниманіе теорію относительныхъ движеній, то это не приводитъ къ сколько-нибудь замѣтной неточности, какъ показываетъ наблюденіе.

60. Силы. — Терминъ сила не входитъ въ принципы динамики, которые мы только-что изложили. Мы можемъ, въ самомъ дѣлѣ, вовсе обойтись безъ этого понятія. Предметъ динамики можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: „зная движенія, возникающія при нѣкоторыхъ данныхъ условіяхъ, предсказать, какія движенія возникнутъ при другихъ данныхъ условіяхъ“. Въ этой задачѣ рѣчь идетъ исключительно о тѣлахъ и движеніяхъ, и нѣтъ никакой необходимости вводить третій элементъ.

Тѣмъ не менѣе, въ цѣляхъ краткости, выгодно заключить слѣдующее условіе: когда точка M массы m получаетъ опредѣленное ускореніе J , опредѣляемое присутствіемъ одной или нѣсколькихъ другихъ матеріальныхъ точекъ, то мы говоримъ условно,



Фиг. 66.

что точка M подвержена со стороны этой или этихъ матеріальныхъ точекъ дѣйствію силы, представляемой векторомъ MF , который, имѣя начало въ точкѣ M и будучи такъ же направленъ и обращенъ въ ту же сторону, что и векторъ-ускореніе J , по величинѣ или напряженію равенъ произведенію mJ изъ массы точки на величину ускоренія. Мы имѣемъ, слѣдовательно, геометрическое равенство:

$$\vec{F} = m\vec{J}.$$

Ясно, что сила есть производное понятіе, опредѣляемое съ помощью другихъ количествъ. Векторъ F связанъ съ точкой M .

61. Принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія. — Подъ названіемъ принципа равенства дѣйствія и противодѣйствія Ньютонъ высказалъ слѣдующій законъ: если на точку A дѣйствуетъ сила F , обусловленная присутствіемъ другой точки B , то эта сила направлена по прямой AB , и вторая точка B испытываетъ со стороны точки A дѣйствіе силы, равной и прямопротиво-

положной силѣ F . Ньютонъ выразилъ этотъ законъ словами: противодѣйствіе равно и противоположно дѣйствию. Этотъ принципъ неявно содержится въ тѣхъ принципахъ, которые были изложены нами.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ (фиг. 65), что двѣ матеріальныя точки A и B , имѣющія массы m и m' , дѣйствуютъ одна на другую. Ускоренія J и J' этихъ двухъ точекъ направлены по прямой AB въ противоположныя стороны и удовлетворяютъ соотношенію

$$\frac{J}{J'} = \frac{m'}{m}; \quad mJ = m'J'.$$

Силы $\vec{F} = m\vec{J}$, $\vec{F}' = m'\vec{J}'$, приложенныя къ точкамъ A и B , направлены, слѣдовательно, по прямой AB въ противоположныя стороны и имѣютъ одинаковое напряженіе. Это есть законъ Ньютона.

Принципъ равенства дѣйствія и противодѣйствія распространяется непосредственно на взаимодѣйствія двухъ системъ точекъ (S) и (S').

Если точки системы (S) производятъ на точки системы (S') дѣйствія, представляемые нѣкоторыми силами, то, обратно, точки системы (S') производятъ на точки системы (S) дѣйствія, представляемые силами, равными и прямо противоположными первымъ силамъ.

Поэтому, когда мы производимъ рукой давленіе на стѣну, то послѣдняя противодѣйствуетъ рукѣ съ равной и прямопротивоположной силой; когда лошадь тянетъ повозку, дѣйствія одной изъ постромокъ на повозку равны и прямопротивоположны дѣйствіямъ постромки на постромку и т. д.

62. Сложеніе силъ. Равнодѣйствующая. — Четвертый принципъ приводитъ непосредственно къ правилу сложения силъ.

Система S_1 , дѣйствуя одна на матеріальную точку M , сообщаетъ ей ускореніе J_1 ; она порождаетъ, слѣдовательно, въ этой точкѣ силу F_1 , опредѣляемую геометрическимъ равенствомъ (фиг. 67)

$$\vec{F}_1 = m\vec{J}_1.$$

Точно такъ же вторая система S_2 , дѣйствуя одна, при тѣхъ же условіяхъ положенія и скорости сообщаетъ точкѣ M ускореніе J_2 и порождаетъ силу

$$\vec{F}_2 = m\vec{J}_2.$$

... Последняя система S_n , дѣйствуя одна, сообщаетъ точкѣ M ускореніе J_n и порождаетъ, слѣдовательно, силу

$$\vec{F}_n = m\vec{J}_n.$$

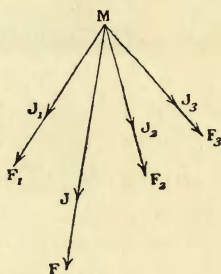
Если всѣ эти силы дѣйствуютъ на точку M одновременно при тѣхъ же условіяхъ, то онѣ сообщаютъ ей ускореніе J , равное геометрической суммѣ ускореній $J_1, J_2, \dots, J_n$:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \dots + \vec{J}_n.$$

Сила $\vec{F}$, которая одна сообщила бы точкѣ такое же самое ускореніе J (фиг. 67), равна $m\vec{J}$; мы имѣемъ, слѣдовательно, равенство:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Такимъ образомъ, эта единственная сила, которая называется равнодѣйствующей данныхъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$, въ каждый



Фиг. 67.

моментъ есть геометрическая сумма векторовъ, представляющихъ силы $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Мы можемъ поэтому примѣнить къ сложению и разложенію силъ, дѣйствующихъ на одну и ту же точку, все то, что было изложено нами относительно сложения и разложенія сходящихся векторовъ.

63. Равновѣсіе. — Если нѣсколько силъ, приложенныхъ къ одной матеріальной точкѣ, находящейся въ покоѣ, не сообщаютъ ей никакого движенія, то говорятъ, что силы взаимно уравновѣши-

ваются. Въ даномъ случаѣ геометрическая сумма ускореній, обусловленныхъ этими силами, равна нулю; поэтому и геометрическая сумма силъ, т. е. ихъ равнодѣйствующая, также равна нулю. Это необходимое условіе равновѣсія является, очевидно, и достаточнымъ.

Вообще, матеріальная система, подверженная дѣйствию нѣкоторыхъ силъ, находится въ равновѣсіи, если эти силы, приложенныя къ системѣ въ состояніи покоя, не сообщаютъ ей никакого движенія.

64. Статика; динамика. — Часть механики, изучающая условія, которымъ должны удовлетворять силы, приложенныя къ системѣ точекъ, чтобы имѣло мѣсто равновѣсіе, называется статикой. Та часть механики, которая изучаетъ соотношенія, связывающія силы съ вызванными ими движеніями, называется динамикой.

Мы начнемъ съ изученія статики, которая представляетъ собой не что иное, какъ особый родъ геометріи; затѣмъ мы перейдемъ къ динамикѣ. Такой порядокъ изложенія оправдывается тѣмъ соображеніемъ, что благодаря принципу Даламбера составленіе уравненія какой-нибудь задачи изъ динамики приводится къ рѣшенію нѣкоторой задачи изъ статики.

Исторически статика является самой древней отраслью механики. Въ самомъ дѣлѣ, она возникла уже при Архимедѣ, который установилъ принципъ рычага въ своей книгѣ „*De aequiponderantibus*“. Что касается динамики, то она возникла лишь вмѣстѣ съ открытіями Галилея.

II. — ЕДИНИЦЫ МАССЫ И СИЛЫ; ОДНОРОДНОСТЬ.

65. Тяжесть; вѣсъ. — Тяжелая точка, падая безъ начальной скорости съ небольшой высоты, получаетъ относительно земли прямолинейное равноѣрно ускоренное движеніе по вертикали. Ускореніе g этого движенія измѣняется въ зависимости отъ широты мѣста и высоты; въ Парижѣ оно имѣетъ величину 9,808, измѣряясь числомъ метровъ въ секунду. Вслѣдствіе движенія земли этому относительному движенію соотвѣтствуетъ абсолютное движеніе, не прямолинейное и не равноѣрное. Изъ сказаннаго слѣдуетъ заключить, что

тяжелая точка на поверхности земли подвержена дѣйствію силы; эта сила есть притяженіе земли.

Если тяжелая матеріальная точка задерживается преградой, то земля продолжаетъ дѣйствовать на точку, но эффектъ, производимый этой силой, видоизмѣняется: это обуславливается тѣмъ, что преграда также оказываетъ дѣйствіе на точку. Напримѣръ, если тяжелая точка, прикрѣпленная къ концу нити, неподвижна относительно земли, то нить оказываетъ на точку дѣйствіе, которое есть не что иное, какъ натяженіе нити. Абсолютнымъ вѣсомъ точки называется фиктивная сила, равная и прямопротивоположная этому натяженію.

Если бы земля была неподвижна, то матеріальная точка, подвѣшенная къ нити, была бы въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ натяженія нити и притяженія земли; это послѣднее было бы равно и прямопротивоположно натяженію, т. е. равно абсолютному вѣсу точки. Но въ дѣйствительности матеріальная точка не неподвижна и не обладаетъ равномернымъ прямолинейнымъ движеніемъ; натяженіе и притяженіе не уравниваются взаимно, и абсолютный вѣсъ отличенъ отъ притяженія. Впрочемъ, это различіе очень мало, и въ большинствѣ явленій имъ можно пренебречь. Ниже мы увидимъ, что тяжелая матеріальная точка, падая въ пустотѣ съ небольшой высоты, получаетъ относительно земли почти совершенно такое же движеніе, какое имѣла бы эта точка, если бы земля была неподвижна и точка падала бы подъ дѣйствіемъ своего абсолютнаго вѣса. Такъ какъ это движеніе обладаетъ постояннымъ ускореніемъ g , то абсолютный вѣсъ p точки, имѣющей массу m , въ одномъ и томъ же мѣстѣ представляетъ собою постоянную силу:

$$p = mg.$$

Подобно ускоренію g этотъ вѣсъ измѣняется съ широтой и высотой.

Объ абсолютномъ вѣсѣ можно также составить себѣ понятіе слѣдующимъ образомъ: предположимъ, что матеріальная точка помѣщена на рукѣ, неподвижной относительно земли; рука дѣйствуетъ на точку, и это дѣйствіе есть сила, направленная вертикально вверхъ и равная по своему напряженію абсолютному вѣсу точки; обратно, по принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія точка производитъ на руку давленіе, которое направлено внизъ, имѣетъ такое же

напряженіе, то же направленіе и обращено въ ту же сторону, что и абсолютный вѣсъ; именно это давленіе чувствуется рукой и даетъ намъ смутное представленіе объ абсолютномъ вѣсѣ. Если точка помѣщена на чашкѣ вѣсовъ, то полное давленіе на чашку точно такъ же тождественно съ абсолютнымъ вѣсомъ.

66. Три основныя единицы. — Въ геометріи мы пользуемся одной основною единицей — единицей длины, изъ которой затѣмъ получаютъ производныя единицы площади и объема.

Въ кинематикѣ мы пользуемся двумя основными единицами: единицей длины и единицей времени, и изъ нихъ мы выводимъ единицы, служащія для измѣренія другихъ количествъ: скорости, ускоренія.

Наконецъ, въ механикѣ приходится пользоваться тремя основными единицами: — единицей длины, времени и третьей единицей, которая, соотвѣтственно двумъ обычно употребляемымъ системамъ, есть либо единица массы, либо же единица силы.

Абсолютныя единицы. Система С. G. S. Дина. — Въ этой системѣ сперва измѣряются массы. Это измѣреніе основывается на томъ обстоятельстве, что массы тѣлъ можно сравнивать между собой съ помощью вѣсовъ. Дѣйствительно, пусть, въ опредѣленномъ мѣстѣ земли, g будетъ ускореніе, обусловленное тяжестью, а $p, p', p'', \dots$ — абсолютныя вѣса матеріальныхъ точекъ, массы которыхъ равны соотвѣтственно $m, m', m'', \dots$. Мы имѣемъ:

$$p = mg, \quad p' = m'g, \quad p'' = m''g, \quad \dots$$

Поэтому, если $p = p'$, то $m = m'$ и если $p = p' + p''$, то $m = m' + m'', \dots$; вообще, массы матеріальныхъ точекъ пропорціональны ихъ абсолютнымъ вѣсамъ въ одномъ и томъ же мѣстѣ, т. е. ихъ относительнымъ вѣсамъ, найденнымъ съ помощью вѣсовъ. Выбравъ произвольно единицу массы, мы можемъ, слѣдовательно, измѣрить всѣ другія массы при помощи вѣсовъ.

Напряженія силъ численно выражаются формулой

$$F = mJ,$$

гдѣ m есть масса точки, на которую дѣйствуетъ сила, и J — ускореніе, обусловленное этой силой. Если предположимъ, что величины m и J обѣ равны единицѣ, то сила F выразится черезъ 1; итакъ,

въ этой системѣ единицей силы служить такая сила, которая, дѣйствуя на единицу массы, сообщаетъ ей ускореніе, равное единицѣ длины, при чемъ предполагается, что выбрана единица времени. Сообразно съ принципами, принятыми Британской комиссіей въ 1871 г., а затѣмъ конгрессомъ электриковъ въ 1881 г., въ качествѣ первоначальныхъ единицъ выбраны слѣдующія: для длинъ сантиметръ, для массъ масса-граммъ, т. е. масса одного кубическаго сантиметра дистиллированной воды при 4°, и, наконецъ, для времени — секунда средняго солнечнаго времени. Въ этой системѣ единицъ C. G. S. (centimètre, gramme, seconde) масса тѣла выражается такимъ же числомъ граммовъ, какъ и его относительный вѣсъ; единица силы, называемая диной, есть сила, которая, дѣйствуя на массу въ 1 *гр.*, сообщаетъ ей ускореніе, равное единицѣ.

Абсолютный вѣсъ 1 *гр.* въ Парижѣ равенъ 980,8 динамъ; дѣйствительно, этотъ абсолютный вѣсъ сообщаетъ массѣ 1 *гр.* ускореніе, выражаемое числомъ 980,8, при чемъ единица длины есть сантиметръ.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что количества, называемыя въ торговлѣ вѣсомъ, представляютъ собою не вѣса, но массы; то, что въ торговлѣ считается вѣсомъ тѣла въ граммахъ, есть не что иное, какъ его масса въ системѣ C. G. S.

Вторая система. Промышленныя единицы. Килограммъ-сила. — Въ приложеніяхъ часто пользуются второй системой единицъ, въ которой основными единицами служатъ единицы длины, силы и времени, а единица массы является производной. Это есть слѣдующая система:

единица длины метръ,
единица силы килограммъ-сила,
единица времени секунда;

килограммъ-вѣсъ или килограммъ-сила есть абсолютный вѣсъ литра воды въ Парижѣ. При опредѣленіи этой единицы силы необходимо прибавить, что абсолютный вѣсъ взять въ опредѣленномъ мѣстѣ, напримѣръ, въ Парижѣ, потому что абсолютный вѣсъ тѣла мѣняется въ зависимости отъ широты и высоты.

Въ этой системѣ масса точки опредѣляется формулой

$$m = \frac{p}{g}$$

гдѣ p есть абсолютный вѣсъ, вычисленный въ килограммахъ-силахъ, а g — ускореніе, обусловленное тяжестью. Если возьмемъ $p = g$, то получимъ $m = 1$. Единица массы есть, слѣдовательно, масса тѣла, абсолютный вѣсъ котораго въ какомъ-либо мѣстѣ выражается тѣмъ же числомъ, что и ускореніе, обусловленное въ этомъ мѣстѣ тяжестью. Если взять, напримѣръ, Парижъ, то окажется, что $g = 9,81$, такъ какъ единицей длины служить метръ; единицей массы служить, слѣдовательно, масса тѣла, абсолютный вѣсъ котораго въ Парижѣ равенъ 9,81 кг., т. е. масса 9,81 л. воды.

67. Статическое измѣреніе силъ. — Первой вошла въ употребленіе система мѣръ, въ которой единицей служить абсолютный вѣсъ. Это объясняется тѣмъ, что человѣкъ раньше создалъ себѣ понятіе о силѣ вслѣдствіе усилія, которое ему приходится затрачивать, чтобы выдержать грузъ; благодаря этому онъ сталъ сравнивать силы съ вѣсомъ. Это сравненіе можетъ быть выполнено точно при помощи динамометра. Возьмемъ вертикальную спиральную пружину, удлиненіе которой можетъ быть измѣрено посредствомъ градуирования; привѣсимъ къ этой пружинѣ въ Парижѣ гири въ 1 кг., въ 2 кг., и т. д.; мы можемъ отмѣтить соотвѣтственные растязженія пружины. Тогда для измѣренія какой-либо силы, дѣйствующей на матеріальную точку, мы можемъ скрѣпить точку съ концомъ пружины, расположить ось пружины по направленію силы и отмѣтить соотвѣтствующее растязженіе; мы будемъ имѣть мѣру силы въ килограммахъ-силахъ.

Это статическое измѣреніе силъ имѣетъ очень важное значеніе, такъ какъ оно показываетъ, что основное соотношеніе

$$F = mJ$$

не есть простое тождество. Возьмемъ, напримѣръ, матеріальную точку, на которую дѣйствуетъ сила F , зависящая только отъ положенія точки. Давая точкѣ различныя положенія и измѣряя статически силу въ каждомъ изъ этихъ положеній, мы найдемъ законъ измѣненія силы F въ зависимости отъ положенія точки; аналитически мы будемъ знать проекціи X , Y , Z силы въ функции координатъ точки. Если мы затѣмъ бросимъ точку, подвергая ее дѣйствию разсматриваемыхъ силъ, то она получитъ такое движеніе, что ея уско-

реніе въ каждой точкѣ M ея траекторіи будетъ геометрически равно вектору $\frac{F}{m}$ въ этой точкѣ.

68. Однородность. — Хотя для приложеній необходимо выбрать систему опредѣленныхъ единицъ, но въ теоріи такой необходимости не существуетъ. Въ теоретическихъ изысканіяхъ предпочитаютъ оставлять основныя единицы неопредѣленными, съ той цѣлью, чтобы полученныя формулы могли быть приложены ко всякой системѣ единицъ. Такъ какъ формулы должны оставаться въ силѣ независимо отъ выбора трехъ основныхъ единицъ, то онѣ должны обладать тройной однородностью: относительно длинъ, временъ и массъ. Пусть l будетъ длина, t — время, m — масса, v — скорость, j — ускореніе и f — сила, измѣренныя посредствомъ нѣкоторой системы основныхъ единицъ: длины, времени и массы. Если мы возьмемъ въ λ разъ меньшую единицу длины, въ τ разъ меньшую единицу времени и въ μ разъ меньшую единицу массы, то размѣры упомянутыхъ величинъ превратятся въ слѣдующія:

$$l\lambda, \quad t\tau, \quad m\mu, \quad v\frac{\lambda}{\tau}, \quad j\frac{\lambda}{\tau^2}, \quad f\frac{\lambda\mu}{\tau^2};$$

дѣйствительно, скорость есть частное отъ дѣленія длины на время, ускореніе — частное отъ дѣленія скорости на время, а сила — произведеніе ускоренія на массу. Итакъ, если величины основныхъ единицъ не установлены, то формулы должны оставаться въ силѣ, каковы бы ни были множители λ , μ , τ .

Напримѣръ, періодъ безконечно малаго двойного колебанія простого маятника длины l въ такомъ мѣстѣ, гдѣ ускореніе силы тяжести равно g , выражается формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Если мы измѣнимъ единицы указаннымъ выше образомъ, то получимъ

$$T\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l\lambda}{\left(\frac{g\lambda}{\tau^2}\right)}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

формула не измѣнилась; она обладаетъ однородностью.

Обратно, эти соображенія объ однородности даютъ возможность найти а priori строеніе формулъ.

Если допустимъ, напримѣръ, что періодъ T бесконечно малаго двойного колебанія простого маятника зависитъ отъ длины l маятника, его массы m и напряженія тяжести g , такъ что

$$T = \varphi(l, m, g), \quad (1)$$

то мы можемъ изъ условій однородности вывести форму выраженія для T . Дѣйствительно, уменьшимъ въ λ разъ единицу длины, въ τ разъ единицу времени и въ μ разъ единицу массы; каковы бы ни были числа λ , τ , μ , мы должны имѣть равенство:

$$T\tau = \varphi\left(l\lambda, m\mu, \frac{g\lambda}{\tau^2}\right). \quad (2)$$

Выберемъ числа λ , τ , μ такимъ образомъ, чтобы три количества, стоящія подъ знакомъ φ были равны единицѣ:

$$\lambda = \frac{1}{l}, \quad \mu = \frac{1}{m}, \quad \tau = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

и мы получимъ:

$$T\sqrt{\frac{g}{l}} = \varphi(1, 1, 1).$$

вторая часть есть, очевидно, нѣкоторое число k ; поэтому

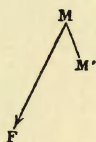
$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Число k можно опредѣлить путемъ наблюденія; ниже мы увидимъ, что $k = 2\pi$.

69. Подобіе въ механикѣ. — Изложенныя соображенія лежатъ въ основаніи теоріи подобія въ механикѣ. Двѣ механическія системы могутъ быть разсматриваемы, какъ подобныя, если мы можемъ перейти отъ одной изъ нихъ къ другой, умноживъ всѣ длины на одинъ и тотъ же множитель λ , всѣ массы на μ , времена на τ , скорости на $\frac{\lambda}{\tau}$, ускоренія на $\frac{\lambda}{\tau^2}$ и силы на $\frac{\lambda\mu}{\tau^2}$.

III. — РАБОТА. СИЛОВАЯ ФУНКЦІЯ. СИЛОВОЕ ПОЛЕ.

70. Элементарная работа. — Разсмотримъ силу F , приложенную къ матеріальной точкѣ M ; предположимъ, что эта точка подвергается какому-либо безконечно малому перемѣщенію MM' относительно нѣкоторой системы сравненія (фиг. 68); элементар-



Фиг. 68.

ной работой силы F , соотвѣтствующей перемѣщенію MM' , называется геометрическое, или внутреннее, произведение (п. 3) силы F на перемѣщеніе MM' :

$$F \cdot \overline{MM'} \cos FMM', \quad (2)$$

т. е. произведение силы на перемѣщеніе и на косинусъ угла между направлениемъ силы и направлениемъ перемѣщенія. Эта элементарная работа есть алгебраическое количество, которое можетъ быть больше нуля, меньше нуля или равно нулю, смотря по тому, будетъ ли уголъ FMM' острымъ или тупымъ, или прямымъ. Когда работа бываетъ положительной, она называется движущей; когда она бываетъ отрицательной, она называется сопротивленіемъ. Если безконечно малое перемѣщеніе совершается въ теченіе времени dt , то скорость точки во время этого перемѣщенія есть $v = \frac{MM'}{dt}$, и выраженіе для элементарной работы мы можемъ представить въ видѣ

$$F v \cos (F, v) dt,$$

такъ какъ уголъ между силой и скоростью совпадаетъ съ угломъ, составленнымъ силой и перемѣщеніемъ.

Мы можемъ написать элементарную работу въ видѣ произведенія

$$\overline{MM'} [F \cos FMM'],$$

и потому она равна перемѣщенію MM' матеріальной точки, умноженному на проекцію силы на направленіе перемѣщенія. Отсюда слѣдуетъ, что если къ точкѣ M приложены нѣсколько силъ, то для одного и того же перемѣщенія работа равнодѣйствующей этихъ силъ равна суммѣ работъ составляющихъ, ибо проекція равнодѣйствующей на направленіе перемѣщенія равна суммѣ проекцій составляющихъ.

Написавъ работу въ видѣ произведенія

$$F [\overline{MM'} \cos FMM'],$$

мы можемъ опредѣлить ее, какъ произведеніе силы на проекцію перемѣщенія на направленіе силы. Поэтому, если перемѣщеніе MM' есть геометрическая сумма нѣсколькихъ перемѣщеній, или если скорость точки есть геометрическая сумма нѣсколькихъ скоростей, то элементарная работа силы F , соответствующая результирующему перемѣщенію или результирующей скорости, есть сумма элементарныхъ работъ силы F , соответствующихъ составляющимъ перемѣщеніямъ или составляющимъ скоростямъ.

Когда элементарная работа силы равна нулю, то либо перемѣщеніе равно нулю, либо же сила перпендикулярна къ перемѣщенію.

71. Аналитическое выраженіе элементарной работы. —

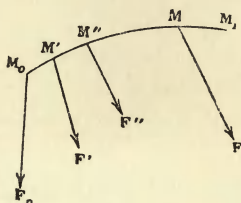
Пусть x, y, z будутъ координаты точки M относительно трехъ прямоугольныхъ осей выбранной координатной системы; обозначимъ черезъ $x + dx, y + dy, z + dz$ координаты бесконечно близкой точки M' , и черезъ X, Y, Z проекціи силы F на три оси. Направляющіе косинусы силы F и перемѣщенія MM' равны соответственно

$$\frac{X}{F}, \quad \frac{Y}{F}, \quad \frac{Z}{F}, \quad \frac{dx}{MM'}, \quad \frac{dy}{MM'}, \quad \frac{dz}{MM'}.$$

Вычисливъ $\cos FMM'$, т. е. косинусъ угла между этими двумя направленіями, мы получимъ выраженіе элементарной работы въ прямоугольныхъ декартовыхъ координатахъ:

$$F \cdot MM' \cos FMM' = X dx + Y dy + Z dz.$$

72. Полная работа. — Разсмотримъ движущуюся точку M , совершающую конечное перемѣщеніе; она выходитъ въ моментъ t_0 изъ точки M_0 , приходитъ въ моментъ t_1 въ точку M_1 и, слѣдуя нѣкоторому закону движенія, описываетъ кривую M_0M_1 (фиг. 69).



Фиг. 69.

Пусть F будетъ сила, дѣйствующая на эту движущуюся точку; полной работой силы F , соответствующей разсматриваемому конечному перемѣщенію, называется сумма элементарныхъ работъ этой силы, соответствующихъ всѣмъ безконечно малымъ послѣдовательнымъ перемѣщеніямъ, изъ которыхъ складывается конечное перемѣщеніе. Мы дѣлимъ дугу M_0M_1 на безконечно малыя части M_0M' , $M'M''$, $M''M'''$, ... и вычисляемъ сумму

$$\mathfrak{E} = \lim (F_0 \overline{M_0M'} \cos \widehat{F_0M_0M'} + F' \overline{M'M''} \cos \widehat{F'M'M''} + \dots),$$

гдѣ F_0 есть значеніе силы F , дѣйствующей въ точкѣ M_0 , F' — значеніе этой силы въ моментъ, когда движущаяся точка находится въ M' , ... Эта сумма $\mathfrak{E}$ и есть полная работа силы F . Она дается формулой

$$\mathfrak{E} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} X dx + Y dy + Z dz, \quad (3)$$

выражающей сумму элементарныхъ работъ. Напримѣръ, если сила F постоянно нормальна къ траекторіи, то всѣ элементы суммы равны нулю, и работа равна нулю.

Единицы работы. — Выбравъ основныя единицы, мы найдемъ, что полная работа силы единицы, дѣйствующей на точку, которая перемѣщается въ направленіи силы, на длину, равную единицѣ, выражается единицей. Такая работа принимается за единицу работы: 1° въ системѣ С. G. S. единица работы называется эргомъ;

2° въ системѣ промышленныхъ единицъ, въ которой единицей силы служить килограммъ-сила, а единицей длины — метръ, единица работы есть килограмметръ.

При вычисленіи полной работы $\mathcal{E}$ могутъ представиться слѣдующіе случаи:

73. Сила зависитъ отъ времени или отъ скорости. —

Въ наиболѣе общемъ случаѣ, который можетъ встрѣтиться, сила F зависитъ отъ положенія движущейся точки, отъ ея скорости и отъ времени, такъ что проекціи X, Y, Z выражаются заданными функциями отъ $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ и t . Для вычисленія работы $\mathcal{E}$ въ этомъ случаѣ нужно знать движеніе точки отъ положенія M_0 до положенія M_1 , т. е. выраженія координатъ точки

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t)$$

въ функціяхъ времени. Тогда мы можемъ подставить въ опредѣленный интеграль (3) эти выраженія координатъ x, y, z , а также и тѣ выраженія для dx, dy, dz , которыя получатся путемъ дифференцированія, и такимъ образомъ привести интеграль къ виду

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t) dt,$$

послѣ чего можно вычислить работу $\mathcal{E}$.

Мы не будемъ останавливаться на этомъ общемъ случаѣ и разсмотримъ подробно весьма важный случай, когда сила зависитъ только отъ положенія движущейся точки.

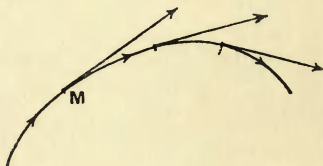
74. Сила зависитъ только отъ положенія движущейся точки. Силовое поле. — Вообразимъ матеріальную точку массы m , на которую дѣйствуетъ сила F , зависящая только отъ положенія точки, но не зависящая ни отъ скорости ея, ни отъ времени. Тогда мы въ каждой точкѣ пространства M будемъ имѣть соотвѣтствующую ей силу F , а именно ту, которая дѣйствовала бы на разсматриваемую матеріальную точку, если бы она занимала положеніе M . Совокупность этихъ силъ F , соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ положеніямъ, послѣдовательно занимаемымъ точкой M , составляетъ такъ называемое силовое поле.

Въ этомъ случаѣ проекціи силы, дѣйствующей на точку M , суть однозначныя функціи координатъ точки x, y, z :

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \psi(x, y, z), \quad Z = \chi(x, y, z). \quad (4)$$

Въ физикѣ напряженіе силы поля обыкновенно пропорціонально массѣ точки M : въ этомъ случаѣ напряженіемъ и направлениемъ поля въ точкѣ (x, y, z) называется напряженіе и направленіе силы $\frac{X}{m}, \frac{Y}{m}, \frac{Z}{m}$, которая дѣйствовала бы на единицу массы, помещенной въ точкѣ (x, y, z) .

Силовыя линіи поля. — Силовой линіей поля называется линія, обладающая тѣмъ свойствомъ, что въ каждой ея точкѣ соотвѣтственная сила служитъ касательной къ этой линіи (фиг. 70). Поло-



Фиг. 70.

жительнымъ направлениемъ на силовой линіи условились считать ту сторону, куда направлена сила въ каждой точкѣ линіи; эту сторону отмѣчаютъ маленькими стрѣлками, поставленными вдоль линіи.

Дифференціальныя уравненія силовыхъ линій. — Вообразимъ силовую линію L ; назовемъ черезъ dx, dy, dz дифференціалы, соотвѣтствующіе безконечно малому перемѣщенію по этой линіи, при чемъ начало его есть точка $M(x, y, z)$. Направляющіе косинусы касательной въ точкѣ M пропорціональны дифференціаламъ dx, dy, dz ; съ другой стороны направляющіе косинусы силы F , дѣйствующей на ту же точку M , пропорціональны проекціямъ X, Y, Z . Такъ какъ касательная совпадаетъ по направленію съ силой, то вдоль всей силовой линіи

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \quad (5)$$

Этими уравнениями, по замѣнѣ X , Y , Z ихъ выраженіями въ функціи координатъ x , y , z , опредѣляются силовыя линіи. Можно разсматривать эти уравненія, какъ уравненія, опредѣляющія координаты y , z въ функціи независимой переменнѣй x . Интегрируя эти уравненія, мы найдемъ y и z выраженными въ функціи отъ x и отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ; такимъ образомъ, мы будемъ имѣть уравненія силовыхъ линій въ конечномъ видѣ.

Вычисленіе работы, произведенной силою поля, дѣйствующей на точку, движущуюся въ полѣ. — Для рѣшенія этой задачи достаточно знать кривую C , по которой движущаяся точка прошла отъ M_0 до M_1 ; нѣтъ надобности знать, какимъ образомъ была пройдена кривая, такъ что вычисленіе полной работы становится геометрической задачей (фиг. 69). Нужно вычислить интеграль

$$\mathcal{E} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} X dx + Y dy + Z dz,$$

взятый по кривой C , при чемъ X , Y , Z суть заданныя функціи координатъ x , y , z . Координаты точки M дуги M_0M_1 кривой C мы всегда можемъ выразить въ функціи нѣкотораго параметра q :

$$x = f_1(q), \quad y = f_2(q), \quad z = f_3(q),$$

при чемъ параметръ q измѣняетъ свое значеніе отъ q_0 до q_1 , когда точка M проходитъ дугу кривой M_0M_1 . Такъ какъ составляющія X , Y , Z зависятъ исключительно отъ координатъ x , y , z , то онѣ становятся функціями параметра q вдоль кривой; подставляя въ интеграль (3) эти значенія для x , y , z и тѣ, которыя мы выведемъ для дифференціаловъ dx , dy , dz , мы получимъ формулу

$$\mathcal{E} = \int_{q_0}^{q_1} \Psi(q) dq,$$

которая позволяетъ вычислить работу $\mathcal{E}$.

Если бы движущаяся точка проходила ту же кривую въ противоположномъ направленіи, т. е. отъ M_1 къ M_0 , то полная работа была бы равна — $\mathcal{E}$, такъ какъ мы должны были бы замѣнить предѣлы q_0 и q_1 одинъ другимъ.

75. Частный случай, когда полная работа зависитъ исключительно отъ начального и конечнаго положеній движущейся точки; силовая функція; потенціалъ. — Въ физикѣ и механикѣ часто встрѣчаются силовыя поля, въ которыхъ полная работа силы поля зависитъ только отъ начального положенія M_0 и конечнаго положенія M_1 движущейся точки, но не зависитъ отъ пути, пройденнаго между этими двумя точками. Такія поля характеризуются слѣдующей теоремой:

ТЕОРЕМА. — Для того, чтобы полная работа силы F поля зависѣла исключительно отъ начального и конечнаго положеній движущейся точки, необходимо и достаточно, чтобы выраженіе элементарной работы $Xdx + Ydy + Zdz$ было тождественно съ полнымъ дифференціаломъ однозначной функціи $U(x, y, z)$ координатъ x, y, z движущейся точки.

1° Это условіе необходимо. — Дѣйствительно, предположимъ, что полная работа зависитъ исключительно отъ начального и конечнаго положеній движущейся точки. Возьмемъ въ полѣ опредѣленную неподвижную точку P и перемѣнную точку M съ координатами x, y, z . По предположенію работа $\mathfrak{E}(P, M)$ силы F при переходѣ движущейся точки отъ P въ M зависитъ только отъ положеній точекъ P и M слѣдовательно, работа $\mathfrak{E}(P, M)$ будетъ нѣкоторой однозначной функціей $U(x, y, z)$ координатъ точки M , если мы оставимъ точку P неподвижной, потому что работа $\mathfrak{E}(P, M)$ будетъ имѣть одно только значеніе, когда точка M уже выбрана. Мы можемъ, слѣдовательно, написать равенство

$$\mathfrak{E}(P, M) = U(x, y, z). \quad (6)$$

Найдемъ теперь работу $\mathfrak{E}(M_0, M_1)$ силы F , когда движущаяся точка переходитъ изъ положенія $M_0(x_0, y_0, z_0)$ въ положеніе $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Для этого замѣтимъ, что работа $\mathfrak{E}(P, M_0)$ при переходѣ отъ точки P въ точку M_0 по произвольному пути равна $U(x_0, y_0, z_0)$; работа $\mathfrak{E}(P, M_1)$ при переходѣ отъ точки P въ точку M_1 равна $U(x_1, y_1, z_1)$. Разсмотримъ въ частности путь PM_0M_1 , ведущій отъ точки P къ M_1 черезъ точку M_0 . Работа $\mathfrak{E}(P, M_1)$ вдоль этого пути равна суммѣ работъ при переходѣ отъ точки P въ M_0 , и отъ M_0 въ M_1 ; слѣдовательно,

$$\mathfrak{E}(P, M_1) = \mathfrak{E}(P, M_0) + \mathfrak{E}(M_0, M_1),$$

откуда послѣ подстановки вмѣсто членовъ $\mathcal{E}(P, M_1)$ и $\mathcal{E}(P, M_0)$ соответствующихъ имъ выражений мы получимъ:

$$\mathcal{E}(M_0, M_1) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0).$$

Мы видимъ, что работа вдоль какого-либо пути между двумя точками M_0 и M_1 равна разности значений функции U въ этихъ двухъ точкахъ.

Возьмемъ въ частности двѣ бесконечно близкія точки M и M' съ координатами x, y, z и $x + dx, y + dy, z + dz$; элементарная работа при переходѣ отъ точки M къ точкѣ M' есть разность значений функции U въ этихъ двухъ точкахъ, т. е. дифференціалъ $dU(x, y, z)$, и мы имѣемъ тождественно

$$X dx + Y dy + Z dz = dU(x, y, z),$$

т. е. элементарная работа есть полный дифференціалъ однозначной функции координатъ движущейся точки.

2° Указанное условіе достаточно. — Дѣйствительно, если элементарная работа есть полный дифференціалъ однозначной функции $U(x, y, z)$, то полная работа при переходѣ отъ M_0 до M_1

$$\mathcal{E}(M_0, M_1) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} X dx + Y dy + Z dz$$

можетъ быть написана въ слѣдующемъ видѣ

$$\mathcal{E}(M_0, M_1) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dU(x, y, z).$$

Неопредѣленный интегралъ равенъ $U(x, y, z)$, и работа

$$\mathcal{E}(M_0, M_1) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0),$$

очевидно, не зависитъ отъ пути между точками M_0 и M_1 .

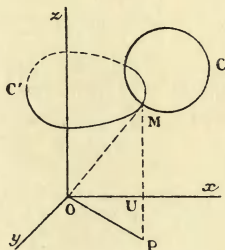
Работа по замкнутому контуру равна нулю.

Замѣчаніе. — Если бы функция U не была однозначной, то работа при переходѣ отъ точки M_0 къ точкѣ M_1 не была бы абсолютно

независима отъ пути въ виду многозначности функции U . Разсмотримъ, напримѣръ, функцию

$$U = \arctan \frac{y}{x}.$$

Функцией U служитъ уголъ xOP , который образуетъ съ осью Ox проекція OP радіуса OM на плоскость xy (фиг. 71); если



Фиг. 71.

движущаяся точка описываетъ замкнутую кривую $МСМ$, не дѣлая оборота вокругъ оси Oz , то легко видѣть, что полная работа есть нуль, такъ какъ функция U , измѣняясь непрерывно вдоль контура C , въ точкѣ M вновь принимаетъ свое начальное значеніе. Если же движущаяся точка описываетъ въ положительномъ направленіи замкнутую кривую $МС'M$, совершая при этомъ одинъ оборотъ вокругъ оси Oz , то полная работа равна 2π , потому что измѣненіе функции U равно 2π ; если движущаяся точка, описывая замкнутую кривую, совершаетъ n оборотовъ вокругъ оси Oz , то работа равна $2n\pi$.

Такія свойства присущи магнитнымъ полямъ, порождаемымъ электрическими токами.

Силовая функція. — Когда элементарная работа силы F есть полный дифференціалъ нѣкоторой функции $U(x, y, z)$, то эта послѣдняя называется силовой функціей; говорятъ также, что силовое поле F произведено функцией $U(x, y, z)$. Согласно опредѣленію полного дифференціала, мы имѣемъ въ этомъ случаѣ тождественно

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

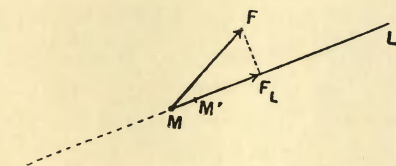
каковы бы ни были величины x, y, z, dx, dy, dz . Отсюда слѣдуетъ, что

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Потенціалъ. — Въ этомъ случаѣ принято также говорить, что силы имѣютъ потенциаль $V(x, y, z)$, равный — U .

76. Поверхности уровня. — Сдѣлаемъ нѣсколько существенныхъ замѣчаній относительно случая, когда существуетъ силовая функция U .

1° Проекція силы на данную полупрямую; производная силовой функции по данному направленію. — Пусть $M(x, y, z)$ будетъ положеніе матеріальной точки и F сила, дѣйствующая на эту точку (фиг. 72). Проведемъ черезъ точку M какую-нибудь



Фиг. 72.

полупрямую ML и назовемъ черезъ F_L проекцію силы F на эту полупрямую. Возьмемъ на полупрямой ML точку M' , отстоящую отъ точки M на бесконечно малое разстояніе $MM' = dl$, и пусть U и $U' = U + dU$ будутъ значенія силовой функции въ точкахъ M и M' . Работа силы F при перемѣщеніи MM' равна

$$F_L dl;$$

съ другой стороны, эта работа равна бесконечно малому измѣненію dU силовой функции при переходѣ отъ точки M въ M' ; слѣдовательно:

$$F_L dl = dU, \quad F_L = \frac{dU}{dl}. \quad (7)$$

Это частное $\frac{dU}{dl}$ называется производной функции U по полупрямой ML ; это выражение говорит намъ, что F_L есть предѣлъ отношенія $\frac{U' - U}{MM'}$, когда точка M' стремится къ точкѣ M по прямой LM .

Формулы, которыя мы вывели выше:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

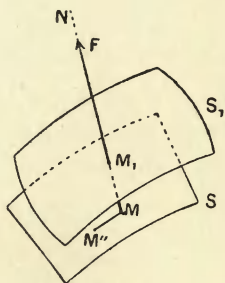
представляютъ собой частные случаи общей формулы (7), которую мы только что получили: онѣ даютъ намъ проекціи силы на три полупрямыя, выходящія изъ точки M и параллельныя положительнымъ направленіямъ осей.

Поверхности уровня. — Поверхности, представляемыя уравненіемъ

$$U(x, y, z) = C,$$

гдѣ C обозначаетъ константу, называются поверхностями уровня. Измѣняя непрерывно величину C , мы получимъ рядъ поверхностей, отличающихся тѣмъ свойствомъ, что черезъ каждую точку той пространственной области, для которой функція U опредѣлена, проходитъ одна изъ этихъ поверхностей.

Сила F , дѣйствующая на матеріальную точку, занимающую положеніе M , направлена по нормали къ той част-



Фиг. 73.

ной поверхности уровня S , которая проходитъ черезъ точку M . — Дѣйствительно, для произвольнаго безконечно малаго перемѣщенія MM' по этой поверхности S (фиг. 73) дифферен-

циаль dU равна нулю, потому что функция U имѣетъ постоянную величину на поверхности S ; поэтому соотвѣтственная работа силы F , равная дифференціалу dU , есть нуль, и сила нормальна къ перемѣщенію MM' ; такъ какъ это свойство имѣетъ мѣсто для всѣхъ безконечно малыхъ перемѣщений по поверхности S , то сила F направлена по нормали къ этой поверхности.

Относительно поверхности уровня, проходящей черезъ точку M , сила F направлена въ сторону возрастанія функции U . — Поверхность уровня S , проходящая черезъ точку M , дѣлитъ пространство вблизи послѣдней на двѣ области: функция U имѣетъ на поверхности постоянное значеніе, равное C ; въ точкахъ, лежащихъ безконечно близко къ поверхности S съ одной стороны ея, функция U принимаетъ значенія, превышающія величину C ; въ безконечно близкихъ точкахъ съ другой стороны поверхности функция U имѣетъ значенія, меньшія величины C .

Проведемъ въ точкѣ M (фиг. 73) нормаль MN къ поверхности S въ ту сторону, гдѣ функция U возрастаетъ, т. е. принимаетъ значенія, превышающія величину C . Нужно доказать, что сила F направлена именно въ сторону MN . Возьмемъ на нормали MN точку M_1 , безконечно близкую къ точкѣ M , и пусть U и U_1 будутъ значенія силовой функции въ точкахъ M и M_1 ; такъ какъ элементарная работа силы F при перемѣщеніи MM_1 равна $U_1 - U$, то эта работа будетъ положительной, и сила F направлена, слѣдовательно, въ сторону MM_1 .

Вдоль одной и той же поверхности уровня сила измѣняется обратно пропорціонально той части нормали, которая заключена между этой поверхностью и безконечно близкой къ ней поверхностью уровня. — Для доказательства проведемъ поверхность уровня S_1 , безконечно близкую къ поверхности S съ той стороны, гдѣ функция U возрастаетъ (фиг. 73). Эта поверхность S_1 пересѣкаетъ нормаль MN къ поверхности S въ точкѣ M_1 ; такъ какъ функция $U(x, y, z)$ имѣетъ на поверхности S постоянное значеніе C , а на поверхности S_1 — постоянное значеніе $C + \varepsilon$, то выраженіе элементарной работы, соотвѣтствующей перемѣщенію MM_1 , даетъ намъ

$$F \cdot MM_1 = U_1 - U, \quad F = \lim_{MM_1 \rightarrow 0} \frac{U_1 - U}{MM_1}, \quad (8)$$

гдѣ ε постоянная величина для всякаго положенія точки M на поверхности S ; такимъ образомъ, сила F измѣняется вдоль поверхности S обратно пропорціонально длинѣ отрезка MM_1 , что и требовалось доказать.

Силовые линіи поля суть ортогональныя траекторіи поверхностей уровня; за положительныя направленія этихъ линій принимаются направленія возрастанія функціи U . — Дѣйствительно, въ каждой точкѣ M силовой линіи сила MF служитъ касательной къ этой линіи и нормалью къ поверхности уровня, проходящей черезъ точку M ; слѣдовательно, силовая линія пересѣкаетъ ортогонально поверхность уровня. Кромѣ того, сила направлена въ сторону возрастанія функціи U , такъ что положительнымъ направленіемъ силовыхъ линій является направленіе возрастанія функціи U .

Изображеніе поля, произведеннаго функціей U . — Мы можемъ поэтому приближенно представить распредѣленіе силъ въ разсматриваемомъ полѣ слѣдующимъ образомъ: пусть ε будетъ постоянное положительное количество, которому мы даемъ тѣмъ меньшее значеніе, чѣмъ больше должно быть приближеніе, котораго мы желаемъ достичь. Построимъ поверхности уровня

$$\begin{array}{llllll} U=0 & U=\varepsilon, & U=2\varepsilon, & \dots, & U=n\varepsilon, & \dots \\ & U=-\varepsilon, & U=-2\varepsilon, & \dots, & U=-k\varepsilon, & \dots \end{array}$$

и перенумеруемъ эти поверхности числами $0, 1, 2, \dots, n, \dots, -1, -2, \dots, -k, \dots$. Черезъ точку M одной какой-нибудь изъ этихъ поверхностей S , имѣющей номеръ p , проведемъ нормаль въ сторону поверхности S_1 , имѣющей номеръ $p+1$, и пусть M_1 будетъ точка пересѣченія этой нормали съ поверхностью S_1 ; сила въ точкѣ M , направленная въ сторону MM_1 , имѣетъ приближенное значеніе

$$F = \frac{\varepsilon}{MM_1}.$$

Проведя ортогональныя траекторіи этихъ поверхностей, мы будемъ имѣть силовыя линіи. Силовая линія, проходящая черезъ точку M , ортогонально пересѣкаетъ поверхность S ; дугу этой линіи, заключенную между весьма близкими одна отъ другой поверхностями, можно считать приблизительно совпадающей съ отрез-

комъ MM_1 , такъ что въ различныхъ точкахъ M пространства сила измѣняется обратно пропорціонально дугѣ силовой линіи, заключенной между поверхностью S , проходящей черезъ точку M , и бесконечно близкой поверхностью S_1 .

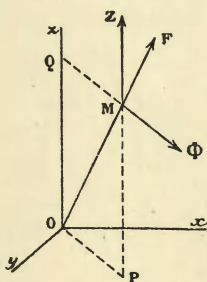
77. Примѣры. — 1° Силовая функція существуетъ въ случаѣ, когда сила перпендикулярна къ неподвижной плоскости и есть функція разстоянія точки отъ этой плоскости. — Для доказательства возьмемъ данную плоскость за плоскость xy , такъ что сила параллельна оси Oz ; составляющія X и Y равны нулю, а Z есть функція $\varphi(z)$ координаты z . Элементарная работа, равная Zdz или $\varphi(z)dz$, есть полный дифференціалъ функціи

$$U = \int \varphi(z) dz.$$

Поверхностями уровня служатъ плоскости, параллельныя плоскости xy ; силовыми линіями служатъ прямыя, параллельныя оси Oz . Такъ, если сила есть вѣсѣ точки M , то, направивъ ось z вертикально вверхъ, мы получимъ:

$$Z = -mg. \quad U = -mgz + \text{const.}$$

2° Силовая функція существуетъ въ случаѣ, когда сила направлена по перпендикуляру, опущенному изъ точки M на неподвижную ось, и есть функція разстоянія точки



Фиг. 74.

ки отъ этой оси. — Данную ось примемъ за ось Oz (фиг. 74) и обозначимъ черезъ ρ разстояніе MQ точки M отъ оси и черезъ Φ значеніе силы, которая считается положительной въ сторону QM .

Такъ какъ проекціи этой силы соотвѣтственно равны

$$X = \Phi \frac{x}{\varrho}, \quad Y = \Phi \frac{y}{\varrho}, \quad Z = 0,$$

то для элементарной работы мы получимъ выраженіе

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{\Phi}{\varrho} (x dx + y dy) = \Phi d\varrho,$$

ибо $\varrho^2 = x^2 + y^2$ и, слѣдовательно, $\varrho d\varrho = x dx + y dy$. По условію, функція Φ зависитъ исключительно отъ разстоянія MQ ; поэтому элементарная работа есть полный дифференціалъ функціи отъ ϱ :

$$U = \int \Phi d\varrho.$$

Поверхностями уровня служатъ цилиндры вращенія вокругъ оси Oz , а силовыми линіями — перпендикуляры $QM\Phi$ къ оси Oz .

3° Наконецъ, силовая функція существуетъ и въ случаѣ силы, направленіе которой постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку O (центральная сила) и которая есть функція разстоянія движущейся точки отъ этой точки O . — Возьмемъ эту точку за начало; пусть r будетъ разстояніе OM и пусть F будетъ значеніе центральной силы, которая считается положительной въ направленіи OM . Такъ какъ проекціи силы равны

$$F \frac{x}{r}, \quad F \frac{y}{r}, \quad F \frac{z}{r},$$

то ея элементарная работа равна

$$\frac{F}{r} (x dx + y dy + z dz) = F dr,$$

ибо, дифференцируя соотношеніе

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

мы получимъ равенство:

$$x dx + y dy + z dz = r dr.$$

Такъ какъ, по условію, F есть функція отъ r , то элементарная работа есть полный дифференціалъ функціи разстоянія r :

$$U = \int F dr.$$

Поверхностями уровня служатъ сферы, имѣющія центры въ точкѣ O , силовыя же линіи суть радіусы, исходящіе изъ центра O . Такъ, напримѣръ, если движущаяся точка m притягивается къ неподвижному центру O съ силой, обратно пропорціональной квадрату разстоянія, то

$$F = -\frac{\mu}{r^2},$$

гдѣ μ есть положительный коэффиціентъ, потому что центральная сила, имѣющая направленіе MO , будетъ отрицательной. Въ этомъ случаѣ

$$U = -\int \mu \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu}{r} + C.$$

Въ нашемъ примѣрѣ полная работа силы при переходѣ движущейся точки изъ бесконечно удаленнаго положенія M_0 въ точку M_1 , расположенную на разстояніи r_1 отъ центра притяженія O , равна

$$\mathfrak{E} = U_1 - U_0 = \frac{\mu}{r_1}.$$

4° Если точка находится одновременно подъ дѣйствіемъ нѣсколькихъ силъ, подчиненныхъ разсмотрѣннымъ выше законамъ, то въ этомъ случаѣ также существуетъ силовая функція; это вытекаетъ изъ слѣдующей теоремы:

Если движущаяся точка находится подъ дѣйствіемъ системы двухъ силъ F_1 и F_2 , изъ которыхъ каждая въ отдѣльности произведена соотвѣтственно силовой функціей U_1 и U_2 , то равнодѣйствующая F силъ F_1 и F_2 производится силовой функціей, равной суммѣ $U_1 + U_2$.

Дѣйствительно, при произвольномъ элементарномъ перемѣщеніи dx, dy, dz элементарная работа силы F равна суммѣ $dU_1 + dU_2$ элементарныхъ работъ силъ F_1 и F_2 . Элементарная работа силы F равна, слѣдовательно, дифференціалу $d(U_1 + U_2)$, что и доказываетъ нашу теорему.

78. Размѣрность работы. — Работа есть сумма членовъ вида

$$\mathcal{E} = \int F \cdot MM' \cos FMM'.$$

Предположимъ, что за основныя единицы взяты единицы длины, массы и времени. Если мы измѣнимъ единицы, взявъ въ λ разъ меньшую единицу длины, въ μ разъ меньшую единицу массы и въ τ разъ меньшую единицу времени, то F приметъ значеніе $F \frac{\lambda\mu}{\tau^2}$, величина MM' , представляющая длину, превратится въ $MM'\lambda$, а $\cos FMM'$, будучи отношеніемъ, т. е. отвлеченнымъ числомъ, не измѣнится; работа $\mathcal{E}$ получитъ, слѣдовательно, значеніе

$$\mathcal{E} \mu \frac{\lambda^2}{\tau^2}.$$

Мы можемъ непосредственно найти эти размѣрности, замѣчая, что работа должна имѣть размѣрность произведенія силы на длину.

79. Мощность. Мощностью машины называется количество работы, которое эта машина можетъ произвести въ единицу времени.

Единица мощности. — Въ системѣ С. G. S. единицей мощности служить эргъ-секунда. Это есть мощность машины, которая въ секунду производитъ работу, равную эргу.

Въ промышленной системѣ единицей мощности служитъ лошадиная сила; это есть мощность машины, которая въ секунду производитъ работу въ 75 килограмметровъ.

80. Главныя силовыя поля, разсматриваемыя въ физикѣ. — 1° Однородное поле. — Поле называется однороднымъ, если на всемъ его протяженіи сила имѣетъ постоянную величину, постоянное направленіе и обращена въ одну и ту же сторону. Таково поле силы тяжести на небольшомъ протяженіи. Поверхности уровня перпендикулярны къ направленію силы; силовыми линіями служатъ прямыя, параллельныя этому направленію. Напряженіе поля есть сила, которая дѣйствовала бы на единицу массы.

2° Поле Ньютонова притяженія. — Вообразимъ неподвижныя точки или матеріальные элементы, имѣющіе массы $m_1, m_2, \dots, m_n$, и движущуюся точку массы m . По закону всемірнаго тяго-

тѣняя точка m притягивается разсматриваемыми неподвижными точками съ силой, пропорціональной ихъ массамъ и обратно пропорціональной квадратамъ разстояній. Алгебраическія величины силъ притяженія, исходящихъ изъ точекъ $m_1, m_2, \dots, m_n$, соотвѣтственно равны, слѣдовательно,

$$F_1 = -f \frac{m m_1}{r_1^2}, \quad F_2 = -f \frac{m m_2}{r_2^2}, \quad \dots, \quad F_n = -f \frac{m m_n}{r_n^2},$$

гдѣ черезъ $r_1, r_2, \dots, r_n$ обозначены разстоянія точки m отъ различныхъ неподвижныхъ точекъ, а f есть постоянный коэффициентъ, представляющій взаимное притяженіе двухъ единицъ массы, находящихся одна отъ другой на разстояніи, равномъ единицѣ.

При безконечно маломъ перемѣщеніи массы m элементарная работа результирующаго притяженія выразится черезъ

$$-f \frac{m m_1}{r_1^2} dr_1 - f \frac{m m_2}{r_2^2} dr_2 - \dots - f \frac{m m_n}{r_n^2} dr_n;$$

Это есть полный дифференціалъ однозначной функціи

$$U = fm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right).$$

Если бы масса движущейся точки была равна 1, то поле было бы произведено функціей

$$V = f \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right).$$

Въ случаѣ точки съ массой m поле произведено функціей

$$U = mV.$$

3° Электрическое поле. — Вообразимъ тѣла, наэлектризованныя какимъ-либо опредѣленнымъ образомъ; пусть $q_1, q_2, \dots, q_n$ будутъ элементарныя положительныя или отрицательныя электрическія массы, составляющія электрическіе заряды. Въ присутствіи этихъ тѣлъ помѣстимъ чрезвычайно малое движущееся тѣло M , заряженное электрической массой q , и обозначимъ черезъ $r_1, r_2, \dots, r_n$ разстоянія точки M отъ точекъ $q_1, q_2, \dots, q_n$. Точка q_1 притягиваетъ или отталкиваетъ точку M съ силой, обратно пропорціональной квадрату разстоянія, въ зависимости отъ того, будетъ ли произве-

деніе qq_1 отрицательнымъ или положительнымъ; центральная сила F_1 , съ которой точка q_1 дѣйствуетъ на q , имѣетъ, слѣдовательно, алгебраическую величину

$$F_1 = k \frac{qq_1}{r_1^2},$$

гдѣ k есть положительная постоянная величина. Другія центральныя силы даются аналогичными выраженіями. Если точка M совершаетъ безконечно малое перемѣщеніе, то равнодѣйствующая F притяженій и отталкиваній произведетъ элементарную работу

$$k \frac{qq_1}{r_1^2} dr_1 + k \frac{qq_2}{r_2^2} dr_2 + \dots + k \frac{qq_n}{r_n^2} dr_n,$$

это выраженіе есть полный дифференціалъ функціи

$$U = -kq \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{r_n} \right).$$

Поле производится, слѣдовательно, однозначной функціей.

Векторъ $\vec{\varphi} = \frac{\vec{F}}{q}$ представляетъ напряженіе поля въ точкѣ M ; оно производится функціей

$$V = \frac{U}{q} = -k \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{r_n} \right).$$

Сила F производится функціей $U = qV$.

4° Магнитное поле. — Магнитное поле есть силовое поле, въ которомъ на магнитный полюсъ массы μ (положительной или отрицательной) дѣйствуетъ сила F , зависящая отъ положенія массы μ . Напряженіе поля въ каждой точкѣ равно силѣ φ , которая дѣйствовала бы на единицу сѣверной магнитной массы, помѣщенную въ этой точкѣ. Мы имѣемъ геометрическое равенство:

$$\vec{F} = \mu \vec{\varphi}.$$

Магнитное поле можетъ быть порождено либо магнитами, либо электрическими токами, либо же обоими этими физическими дѣятелями вмѣстѣ. Можно доказать, что сила φ производится функціей V , вообще не однозначной; проекціи силы φ равны

$$P = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial z};$$

проекціи силы F равны μP , μQ , μR .

81. Работа силъ, приложенныхъ къ системѣ точекъ. —

Силовая функція. Потенціалъ. — Предположимъ, что на n точекъ $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$ дѣйствуютъ данныя силы: на первую точку — силы, равнодѣйствующая которыхъ равна $F_1(X_1, Y_1, Z_1)$, на вторую точку — силы, имѣющія равнодѣйствующую $F_2(X_2, Y_2, Z_2), \dots$. При бесконечно маломъ перемѣщеніи системы сумма элементарныхъ работъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$ равна

$$\left. \begin{aligned} & X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 \\ & + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 \\ & + \dots \\ & + X_n dx_n + Y_n dy_n + Z_n dz_n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Въ случаѣ, когда силы зависятъ исключительно отъ положенія системы, т. е. когда проекціи $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \dots$ суть функціи координатъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ и выраженіе (9) въ точности есть полный дифференціалъ функціи U координатъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$, то говорятъ, что данныя силы допускаютъ силовую функцію U или производятся потенциаломъ — U . Тогда

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Когда система переходитъ изъ положенія P_0 въ положеніе P_1 , сумма полныхъ работъ всѣхъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$ дается формулой

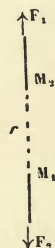
$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int_{(P_0)}^{(P_1)} (X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 \\ + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n) = \int_{(P_0)}^{(P_1)} dU; \end{aligned}$$

она равна, слѣдовательно, разности $U_1 - U_0$ значеній функціи U , измѣняющейся непрерывно при переходѣ системы изъ перваго положенія во второе.

Если функція U представляетъ собой однозначную функцію координатъ, то величины U_0 и U_1 имѣютъ по одному только значенію; полная работа $\mathcal{E}$ всѣхъ силъ въ этомъ случаѣ совершенно

не зависеть отъ пути, по которому система перешла изъ перваго положенія во второе.

82. Примѣры. — 1° Даны двѣ точки M_1 и M_2 ; предположимъ, что точка M_1 дѣйствуетъ на точку M_2 съ силой F_1 , направленной по прямой M_1M_2 ; согласно принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія, дѣйствіе точки M_2 на M_1 есть сила F_2 , равная и прямо-противоположная силѣ F_1 (фиг. 75). Совокупность этихъ двухъ силъ



Фиг. 75.

называется взаимодѣйствіемъ двухъ точекъ; условимся называть алгебраическимъ значеніемъ F взаимодѣйствія двухъ точекъ общее напряженіе двухъ силъ F_1 и F_2 , взятое со знакомъ $+$ или со знакомъ $-$, смотря по тому, отталкиваются ли взаимно точки (какъ у насъ на фигурѣ) или же притягиваются. Обозначивъ черезъ r разстояніе M_1M_2 , мы получимъ для проекцій силъ F_1 и F_2 слѣдующія значенія:

$$\begin{aligned} (F_1) \quad & F \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad F \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad F \frac{z_2 - z_1}{r}, \\ (F_2) \quad & F \frac{x_1 - x_2}{r}, \quad F \frac{y_1 - y_2}{r}, \quad F \frac{z_1 - z_2}{r}, \end{aligned}$$

Составивъ сумму элементарныхъ работъ этихъ двухъ силъ, такъ называемую элементарную работу взаимодѣйствія F , мы найдемъ величину

$$\frac{F}{r} [(x_2 - x_1)(dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1)(dy_2 - dy_1) + (z_2 - z_1)(dz_2 - dz_1)],$$

которая приводится къ выраженію

$$F dr,$$

въ силу очевидныхъ соотношеній

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \\ r^2 dr = (x_2 - x_1)(dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1)(dy_2 - dy_1) + (z_2 - z_1)(dz_2 - dz_1).$$

Итакъ, если взаимодѣйствіе двухъ точекъ есть функція одного только разстоянія r между ними, т. е. $F = \varphi(r)$, то сумма элементарныхъ работъ двухъ силъ F_1 и F_2 представляетъ собой въ точности полный дифференціалъ функціи

$$U = \int \varphi(r) dr.$$

Такъ, напримѣръ, если двѣ точки взаимно притягиваются съ силой, прямо пропорціональной ихъ массамъ m_1 и m_2 и обратно пропорціональной квадрату ихъ разстоянія, то

$$F = -f \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

гдѣ f обозначаетъ постоянный коэффициентъ; отсюда

$$U = f \frac{m_1 m_2}{r} + \text{const.}$$

Предположимъ, что точки вначалѣ были безконечно удалены одна отъ другой, а затѣмъ разстояніе между ними дѣлается равнымъ r ; полная работа равна разности значеній функціи U при переходѣ отъ перваго положенія ко второму, т. е. равна $f \frac{m_1 m_2}{r}$.

2° Возьмемъ теперь произвольное число точекъ $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$; предположимъ, что взаимодѣйствіе каждаго двухъ точекъ M_i и M_k изъ числа разсматриваемыхъ имѣетъ алгебраическое значеніе F_{ik} , которое есть функція только отъ разстоянія r_{ik} двухъ точекъ M_i и M_k . Когда система получаетъ безконечно малое перемѣщеніе, то сумма элементарныхъ работъ всѣхъ этихъ взаимодѣйствій, согласно предыдущему, равна

$$\sum F_{ik} dr_{ik},$$

гдѣ знакъ суммы распространяется на всевозможныя сочетанія индексовъ i и k по два, при чемъ индексы i и k различны. Эта сумма есть полный дифференціалъ функціи

$$U = \sum \int F_{ik} dr_{ik};$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ существуетъ силовая функція. На примѣръ, въ случаѣ системы трехъ точекъ, имѣющихъ массы m_1 , m_2 , m_3 и взаимно притягивающихся попарно съ силой, пропорціо-
нальной массамъ и обратно пропорціо-нальной квадрату разстояній

$$F_{ik} = -f \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2},$$

$$U = f \left(\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right),$$

если не принимать во вниманіе константы. Это значеніе U есть полная работа взаимодействій, когда три точки, вначалѣ бесконечно удаленныя одна отъ другой, приходятъ въ дѣйствительно занимаемая ими положенія.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

СТАТИКА.

ГЛАВА IV.

РАВНОВѢСІЕ ТОЧКИ; РАВНОВѢСІЕ СИСТЕМЫ.

I. — МАТЕРІАЛЬНАЯ ТОЧКА.

83. Свободная точка. — Для равновѣсія свободной точки M необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая R приложенныхъ къ ней силъ была нулемъ, т. е. чтобы три проекціи X, Y, Z равнодѣйствующей R удовлетворяли равенствамъ

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0. \quad (1)$$

Если въ какомъ-либо положеніи $M(x, y, z)$ точка M , не имѣющая начальной скорости, подвергается дѣйствию равнодѣйствующей R , то начальное значеніе этой равнодѣйствующей зависитъ только отъ значеній x, y, z и t ; мы предположимъ, что оно не зависитъ отъ времени t . Въ такомъ случаѣ три уравненія (1) опредѣляютъ координаты положеній равновѣсія. Если существуетъ силовая функція $U(x, y, z)$, то проекціи X, Y, Z представляютъ

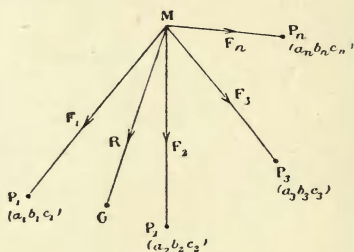
собой частныя производныя функціи U , и уравненія (1) принимаютъ слѣдующій видъ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Это какъ разъ тѣ самыя уравненія, которыя приходится разрѣшать при разысканіи *maxima* и *minima* функціи U отъ трехъ независимыхъ переменныхъ x, y, z . Въ динамикѣ мы докажемъ, слѣдующаго Лежёнъ-Дирихле (Lejeune-Dirichlet), что въ случаѣ, когда функція U дѣйствительно имѣетъ *maximum* въ точкѣ $M (x_1, y_1, z_1)$, эта точка есть положеніе устойчиваго равновѣсія; это означаетъ слѣдующее: если мы произвольнымъ образомъ безконечно мало отклонимъ матеріальную точку отъ положенія M_1 и сообщимъ ей безконечно малую начальную скорость, то мы получимъ движеніе, въ которомъ движущаяся точка безконечно мало отклоняется отъ положенія M_1 .

84. Примѣръ. Притяженія, пропорціональныя разстояніямъ. — Найти положенія равновѣсія матеріальной точки, притягиваемой неподвижными центрами пропорціонально разстояніямъ и массамъ центровъ притяженія.

Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ (фиг. 76) будутъ неподвижные центры и $m_1, m_2, \dots, m_n$ ихъ массы. Силы притяженія $F_1, F_2, \dots, F_n$,



Фиг. 76.

дѣйствующія на матеріальную точку M , будутъ направлены по прямымъ $MP_1, MP_2, MP_3, \dots, MP_n$; величины ихъ соотвѣтственно равны

$$F_1 = fm_1 \overline{MP_1}, \quad F_2 = fm_2 \overline{MP_2}, \quad \dots, \quad F_n = fm_n \overline{MP_n}.$$

гдѣ f обозначаетъ постоянную величину.

Обозначимъ черезъ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n$ координаты центровъ притяженія и черезъ x, y, z координаты точки M . Проекціи силы F_k на три оси равны соотвѣтственнымъ проекціямъ отрезка MP_k , умноженнымъ на $f m_k$; онѣ равны, слѣдовательно,

$$f m_k (a_k - x), \quad f m_k (b_k - y), \quad f m_k (c_k - z).$$

Проекціи равнодѣйствующей равны поэтому

$$X = f \sum m_k (a_k - x), \quad Y = f \sum m_k (b_k - y), \quad Z = f \sum m_k (c_k - z), \quad (3)$$

гдѣ знакъ суммы распространяется на всѣ силы, т. е. на всѣ значенія $k = 1, 2, \dots, n$. Положивъ

$$\mu = \sum m_k, \quad \mu \xi = \sum m_k a_k, \quad \mu \eta = \sum m_k b_k, \quad \mu \zeta = \sum m_k c_k,$$

мы можемъ написать :

$$X = f \mu (\xi - x), \quad Y = f \mu (\eta - y), \quad Z = f \mu (\zeta - z).$$

Разсмотримъ точку G , имѣющую координаты ξ, η, ζ ; эта точка называется центромъ тяжести системы массъ $P_1, P_2, \dots, P_n$. Предыдущія уравненія показываютъ, что равнодѣйствующая силъ, дѣйствующихъ на точку M , равна силѣ, которая получилась бы, если бы мы замѣнили систему центровъ притяженія одной единственной точкой G , имѣющей массу μ . Равнодѣйствующая направлена по прямой MG и равна $f \mu \overline{MG}$. Слѣдовательно, равновѣсіе можетъ имѣть мѣсто лишь въ томъ случаѣ, когда точка M совпадаетъ съ центромъ тяжести G системы.

Въ предыдущемъ $m_1, m_2, \dots, m_n$ суть существенно положительныя числа; допустимъ теперь, что этими числами уже обозначаются не массы, а только коэффициенты, и предположимъ, что нѣкоторые изъ нихъ будутъ отрицательными. Это равносильно допущенію, что соотвѣтственныя силы будутъ отталкивательными: дѣйствительно, такъ какъ проекціи какой-либо изъ этихъ силъ F_k измѣняютъ знаки вмѣстѣ съ числомъ m_k , то сила F_k измѣняетъ свое направленіе на противоположное, когда число m_k становится отрицательнымъ.

Если число μ будетъ отлично отъ нуля, то всѣ предыдущія вычисленія остаются вѣрными, и мы приходимъ къ тѣмъ же результатамъ. Если же μ есть нуль, то три уравненія (3) дѣлаются независимыми отъ координатъ x, y, z ; равнодѣйствующая сила имѣетъ

постоянную величину и постоянное направление, и положенія равновѣсія не существуетъ. Наконецъ, если одновременно удовлетворяются уравненія

$$\mu = 0, \quad \sum m_k a_k = 0, \quad \sum m_k b_k = 0, \quad \sum m_k c_k = 0,$$

то проекціи X, Y, Z будутъ нулями, каковы бы ни были значенія x, y, z ; въ этомъ случаѣ точка M въ любомъ положеніи находится въ равновѣсіи.

Въ настоящемъ примѣрѣ существуетъ силовая функція U ; въ общемъ случаѣ, когда число μ отлично отъ нуля, функція

$$U = -\frac{f\mu}{2} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2] = -\frac{f\mu}{2} MG^2.$$

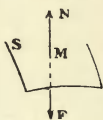
При положительномъ значеніи числа μ эта функція въ точкѣ G равна нулю, а во всѣхъ другихъ точкахъ имѣетъ отрицательное значеніе: она имѣетъ, слѣдовательно, максимумъ въ положеніи равновѣсія, которое будетъ поэтому устойчивымъ. Обратное имѣетъ мѣсто при отрицательномъ значеніи μ . Поверхности уровня $U = \text{const.}$ представляютъ собой сферы съ центромъ въ точкѣ G .

Когда $\mu = 0$, проекціи X, Y, Z имѣютъ постоянныя значенія $f\sum m_k a_k, f\sum m_k b_k, f\sum m_k c_k$, и

$$U = f(x\sum m_k a_k + y\sum m_k b_k + z\sum m_k c_k)$$

будетъ силовой функціей; поверхностями уровня служатъ параллельныя плоскости.

85. Точка, движущаяся на неподвижной поверхности безъ тренія. — Предположимъ, что движущаяся точка M находится на данной неподвижной поверхности S (фиг. 77) подѣй-



Фиг. 77.

ствіемъ данныхъ силъ, имѣющихъ равнодѣйствующую F . Для равновѣсія этой точки необходимо и достаточно, чтобы эта равнодѣйствующая въ случаѣ, если она не равна нулю, была нормальна къ

поверхности. Дѣйствительно, если сила не направлена по нормали, то она можетъ быть разложена на двѣ силы: одну — нормальную, которая прижимаетъ точку къ поверхности, и другую — тангенціальную, которая побуждаетъ точку скользить по поверхности; слѣдовательно, равновѣсія не будетъ. Если въ нѣкоторомъ положеніи M сила F направлена по нормали, то равновѣсіе имѣетъ мѣсто при томъ условіи, что точка ни съ какой стороны поверхности не можетъ сойти съ нея; это наиболѣе часто встрѣчающійся случай. Если же точка только помѣщена на поверхности, какъ предметъ на столѣ, то для равновѣсія недостаточно, чтобы сила была направлена по нормали; необходимо еще, чтобы сила была направлена такимъ образомъ, чтобы она прижимала точку къ поверхности.

Такъ какъ точка можетъ скользить безъ тренія по поверхности, то дѣйствіе поверхности на точку представляетъ собой силу, которая не должна совершенно оказывать сопротивленія скольженію, т. е. не должна давать тангенціальной составляющей. Дѣйствіе поверхности представляетъ собой, слѣдовательно, нормальную силу, которая называется нормальной реакціей. Когда точка находится въ равновѣсіи, нормальная реакція равна и противоположна равнодѣйствующей F . Согласно принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія точка M дѣйствуетъ на поверхность съ силой, которая равна и противоположна реакціи MN и которая называется давленіемъ точки на поверхность.

Выразимъ аналитически полученные результаты; пусть

$$f(x, y, z) = 0$$

будетъ уравненіе поверхности въ прямоугольных координатахъ и пусть X, Y, Z будутъ проекціи силы F . Проекціями нормальной реакціи MN служатъ количества, пропорціональныя направляющимъ косинусамъ нормали къ поверхности, т. е. количества слѣдующаго вида:

$$(N) \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Вслѣдствіе равновѣсія, которое должно имѣть между этой реакціей и силой F , выполняются три условія:

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

которые вмѣстѣ съ уравненіемъ поверхности $f(x, y, z) = 0$ даютъ намъ четыре уравненія для опредѣленія неизвѣстныхъ x, y, z и λ . Предположимъ, что координаты нѣкоторой точки M , лежащей на поверхности, удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ. Если матеріальная точка не можетъ сойти съ поверхности ни съ одной стороны ея, то она въ занимаемомъ ею положеніи находится въ равновѣсіи. Въ противномъ случаѣ нужно, кромѣ того, приписать множителю λ опредѣленный знакъ. Напримѣръ, допустимъ, что точка можетъ оставить поверхность съ той стороны ея, гдѣ выраженіе $f(x, y, z)$ становится положительнымъ; въ этомъ случаѣ нужно, чтобы сила была направлена въ ту сторону, гдѣ выраженіе $f(x, y, z)$ имѣетъ отрицательное значеніе, а реакція должна быть направлена въ противоположную сторону. Геометрическая величина, проекціями которой служить

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

направлена относительно поверхности въ ту сторону, гдѣ выраженіе $f(x, y, z)$ становится отрицательнымъ: это можно вывести, примѣняя къ поверхностямъ $f(x, y, z) = \text{const.}$ замѣчанія, относящіяся къ поверхностямъ уровня (76). Такъ какъ реакція N должна быть направлена въ ту же сторону, то множитель λ долженъ быть положительнымъ.

Въ случаѣ, когда точка не можетъ оставить поверхности, вычисленіе упрощается слѣдующимъ образомъ. Прежде всего мы выражаемъ координаты точки поверхности въ функціи двухъ параметровъ q_1 и q_2 ; предположимъ, напримѣръ, что

$$x = \varphi(q_1, q_2), \quad y = \psi(q_1, q_2), \quad z = \omega(q_1, q_2);$$

для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы сила F была нормальна къ поверхности, т. е. къ каждой изъ двухъ кривыхъ, которыя получаются, если послѣдовательно оставлять постояннымъ параметры q_1 и q_2 ; задача приводитъ къ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$Q_1 = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1} = 0,$$

$$Q_2 = X \frac{\partial x}{\partial q_2} + Y \frac{\partial y}{\partial q_2} + Z \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0.$$

Прѣзціи X , Y , Z , зависящія отъ положенія точки M , суть функціи отъ параметровъ q_1 и q_2 ; два предыдущихъ уравненія относительно параметровъ q_1 и q_2 опредѣляютъ значенія обоихъ параметровъ для положеній равновѣсія.

Особенно интереснымъ представляется случай, когда выраженіе

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2,$$

въ которомъ Q_1 и Q_2 обозначаютъ лѣвыя части предыдущихъ уравненій, въ точности есть полный дифференціалъ нѣкоторой функціи $U(q_1, q_2)$; для нахождения положенія равновѣсія нужно тогда приравнять нулю частныя производныя Q_1 и Q_2 функціи $U(q_1, q_2)$, т. е. разыскать тахііа и мініма этой функціи отъ двухъ независимыхъ переменныхъ q_1 и q_2 . Мы можемъ представить эту функцію въ слѣдующемъ видѣ:

$$U(q_1, q_2) = \int X dx + Y dy + Z dz,$$

при чемъ въ правой части всѣ количества замѣнены ихъ значеніями, выраженными въ параметрахъ q_1 и q_2 .

Въ частномъ случаѣ, когда сила F имѣетъ потенціалъ, мы для всѣхъ значеній x , y , z будемъ имѣть:

$$\int X dx + Y dy + Z dz = U(x, y, z);$$

тогда существуетъ функція $U(q_1, q_2)$, и для полученія ея нужно въ функціи $U(x, y, z)$ замѣнить координаты ихъ выраженіями въ функціи параметровъ q_1 и q_2 . Когда въ нѣкоторомъ положеніи равновѣсія M_1 сила не есть нуль, то поверхность уровня $U(x, y, z) = C$, проходящая черезъ точку M_1 , касается въ этой точкѣ данной поверхности S , потому что сила въ точкѣ M_1 служитъ нормалью одновременно къ поверхности уровня и къ поверхности S .

Въ динамикѣ мы докажемъ, что если функція $U(q_1, q_2)$ проходитъ для нѣкотораго положенія движущейся точки черезъ дѣйствительный максимумъ U_1 , то соотвѣтственное равновѣсіе будетъ устойчивымъ. Напримѣръ, направивъ ось Oz вертикально внизъ, мы для тяжелой точки, лежащей на поверхности, будемъ имѣть $U = mgz$. Поверхностями уровня будутъ горизонтальныя плоскости; въ положеніи равновѣсія касательная плоскость горизонтальна; равновѣсіе будетъ устойчивымъ въ наиболѣе низкихъ точкахъ поверхности (гдѣ z имѣетъ максимумъ).

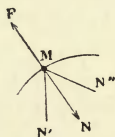
86. Движущаяся точка на неподвижной кривой безъ тренія. — Возьмемъ неподвижную кривую C и на ней точку M , которая движется безъ тренія и находится подъ дѣйствіемъ силъ, имѣющихъ равнодѣйствующую F . Какъ въ случаѣ точки на поверхности, легко понять, что при равновѣсіи сила F должна быть нормальна къ кривой, если только эта сила не равна нулю. Если сила F направлена по нормали, то она уничтожается сопротивленіемъ кривой, и равновѣсіе имѣетъ мѣсто.

Дѣйствіе кривой на точку представляетъ собой нормальную силу MN , которой даютъ названіе нормальной реакціи; точка M производитъ на кривую давленіе, равное и противоположное этой реакціи. Когда точка находится въ равновѣсіи, нормальная реакція равна и противоположна силѣ F ; давленіе точки на кривую равно силѣ F (фиг. 78).

Пусть будутъ

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0$$

уравненія кривой, отнесенной къ тремъ прямоугольнымъ осямъ, а X, Y, Z — проекціи равнодѣйствующей F силъ, приложенныхъ къ точкѣ $M(x, y, z)$.



Фиг. 78.

Для того, чтобы выразить, что имѣетъ мѣсто равновѣсіе, достаточно написать, что сила F равна и прямо противоположна нормальной реакціи N . Последнюю мы всегда можемъ разложить на двѣ другія, направленныя по нормальямъ MN' и MN'' къ двумъ поверхностямъ $f=0$ и $f_1=0$, которыя своимъ пересѣченіемъ опредѣляютъ разсматриваемую кривую: въ самомъ дѣлѣ, три направленія MN, MN', MN'' находятся въ нормальной плоскости. Проекціи этихъ двухъ составляющихъ реакціи MN' и MN'' равны соотвѣтственно

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}; \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Такъ какъ эти двѣ силы и сила F взаимно уравновѣшиваютъ, то

$$\begin{aligned} X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 0, & Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0, \\ Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Эти три уравненія вмѣстѣ съ двумя уравненіями кривой опредѣляютъ пять неизвѣстныхъ x , y , z , λ и λ_1 .

Можно, однако, свести задачу къ рѣшенію одного уравненія съ одною неизвѣстною. Предположимъ, что координаты точки кривой выражены въ функціи параметра q посредствомъ уравненій

$$x = \varphi(q), \quad y = \psi(q), \quad z = \omega(q).$$

Такъ какъ направляющіе косинусы касательной пропорціональны производнымъ $\varphi'(q)$, $\psi'(q)$, $\omega'(q)$, то условіе равновѣсія получится, если приравнять нулю количество

$$Q = X\varphi'(q) + Y\psi'(q) + Z\omega'(q).$$

Каждому значенію параметра q , обращающему количество Q въ нуль, соотвѣтствуетъ положеніе равновѣсія. Въ настоящемъ случаѣ разысканіе положеній равновѣсія всегда сводится къ разысканію тахіма и мініма функціи, зависящей только отъ одной перемѣнной. Дѣйствительно, положимъ

$$U(q) = \int X dx + Y dy + Z dz = \int Q dq,$$

при чемъ въ первомъ интегралѣ координаты x , y , z замѣнены ихъ выраженіями въ функціи параметра q , такъ что этотъ интеграль становится тождественнымъ со вторымъ; чтобы получить условіе равновѣсія, мы ищемъ значенія параметра q , обращающія въ нуль производную функціи U по параметру q ; для нахожденія положеній равновѣсія мы разыскиваемъ, слѣдовательно, тахіма и мініма функціи U . Если существуетъ силовая функція $U(x, y, z)$, то функція $U(q)$ получается, очевидно, путемъ замѣщенія въ предыдущей функціи координатъ x , y , z ихъ выраженіями въ функціи параметра q . Въ этомъ случаѣ поверхность уровня, проходящая черезъ положеніе равновѣсія M_1 , касается кривой въ точкѣ M_1 . Ниже мы увидимъ,

основываясь на общемъ методѣ, что дѣйствительный максимумъ функции $U(q)$ соотвѣтствуетъ устойчивому положенію равновѣсія.

II. — СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ. НЕОБХОДИМЫЯ УНИВЕРСАЛЬНЫЯ УСЛОВІЯ РАВНОВѢСІЯ

87. Системы матеріальныхъ точекъ. — Если система состоитъ изъ свободныхъ точекъ, не зависящихъ одна отъ другой, то для каждой изъ нихъ можно повторить изложенное нами относительно совершенно свободной матеріальной точки. Для существованія равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая сила, дѣйствующихъ на каждую точку, была равна нулю.

Когда система точекъ подчинена связямъ, то остается въ силѣ та же теорема, если разсматривать каждую точку, какъ свободную и подверженную дѣйствію всѣхъ приложенныхъ къ ней силъ, включая силы связи.

Силы, приложенныя къ системѣ, мы разобьемъ здѣсь на два класса: на внутреннія силы и на внѣшнія силы. Мы покажемъ, что для равновѣсія необходимо, чтобы внѣшнія силы удовлетворяли шести условіямъ, одинаковымъ для всѣхъ системъ: эти условія можно назвать универсальными условіями равновѣсія.

88. Внутреннія силы и внѣшнія силы; шесть необходимыхъ условій равновѣсія. — Всякую матеріальную систему, состоящую изъ тѣлъ твердыхъ, жидкихъ, газообразныхъ мы разсматриваемъ, какъ составленную изъ очень большого числа матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ нѣкоторымъ опредѣленнымъ связямъ. Напримѣръ, твердое тѣло представляетъ собой совокупность матеріальныхъ точекъ, которыя должны оставаться на неизмѣнныхъ разстояніяхъ одна отъ другой. Для полученія общихъ теоремъ предполагаютъ, что написаны уравненія равновѣсія этихъ различныхъ матеріальныхъ точекъ и изъ этихъ уравненій составлены сочетанія.

Внутренними силами системы называются взаимодѣйствія различныхъ точекъ системы; по принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія эти дѣйствія точекъ попарно равны и прямопротивоположны. Напримѣръ, если точка m системы притягиваетъ другую

точку m' системы съ нѣкоторой силой, то, обратно, точка m' притягиваетъ точку m съ равной и прямо противоположной силой.

Силы, отличныя отъ только-что опредѣленныхъ внутреннихъ силъ, называются внѣшними силами.

Пусть будутъ $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n$ координаты различныхъ точекъ системы, массы которыхъ равны соответственно $m_1, m_2, \dots, m_n$. Разсматривая одну какую-либо изъ этихъ точекъ, имѣющую массу m и координаты x, y, z , мы можемъ раздѣлить силы, приложенныя къ этой точкѣ, на два класса: 1° къ первому относятся внутреннія силы, дѣйствующія на точку m ; проекціи одной изъ этихъ силъ мы назовемъ черезъ X_i, Y_i, Z_i ; 2° ко второму классу относятся внѣшнія силы, дѣйствующія на эту же точку; проекціи одной изъ этихъ силъ назовемъ черезъ X_e, Y_e, Z_e . Точку m мы можемъ разсматривать, какъ совершенно свободную, но съ условіемъ, чтобы мы считали ее подверженной дѣйствию всѣхъ дѣйствующихъ на нее силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ. Для равновѣсія ея необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ этихъ силъ была нулемъ. Проектируя силы на три оси, мы получимъ слѣдующія три уравненія равновѣсія точки m :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X_i + \Sigma X_e &= 0, \\ \Sigma Y_i + \Sigma Y_e &= 0, \\ \Sigma Z_i + \Sigma Z_e &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ знаки Σ обозначаютъ, что нужно составить сумму проекцій всѣхъ внутреннихъ или всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m .

Предположимъ, что эти уравненія написаны для всѣхъ точекъ системы, и сложимъ почленно уравненія, относящіяся къ оси x ; мы получимъ уравненіе

$$\Sigma \Sigma X_i + \Sigma \Sigma X_e = 0,$$

гдѣ знакъ $\Sigma \Sigma$ указываетъ, что суммованіе распространяется на всѣ силы, дѣйствующія на различныя точки системы. Но, въ силу принципа равенства дѣйствія и противодѣйствія, внутреннія силы попарно равны и прямопротивоположны; слѣдовательно, сумма $\Sigma \Sigma X_i$ ихъ

проекцій на ось x равна нулю, и предыдущее уравненіе приводится къ уравненію

$$\Sigma \Sigma X_e = 0; \quad (2)$$

точно такъ же получаютъ уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \Sigma Y_e &= 0, \\ \Sigma \Sigma Z_e &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Мы имѣемъ, такимъ образомъ, для проекцій внѣшнихъ силъ три необходимыхъ условія равновѣсія. Введя моменты, мы получимъ еще три уравненія.

Вернемся къ уравненіямъ (1); умноживъ первое на $-y$, второе на x и сложивъ, мы получимъ

$$\Sigma (x Y_i - y X_i) + \Sigma (x Y_e - y X_e) = 0;$$

предположимъ, что аналогичныя уравненія написаны для всѣхъ точекъ системы; сложивъ ихъ почленно, мы получимъ уравненіе

$$\Sigma \Sigma (x Y_i - y X_i) + \Sigma \Sigma (x Y_e - y X_e) = 0;$$

но выраженіе $\Sigma \Sigma (x Y_i - y X_i)$ представляетъ сумму моментовъ всѣхъ внутреннихъ силъ около оси Oz ; это выраженіе равно нулю, потому что эти силы попарно равны и прямопротивоположны. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ уравненію

$$\Sigma \Sigma (x Y_e - y X_e) = 0; \quad (3)$$

точно такъ же

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \Sigma (y Z_e - z Y_e) &= 0, \\ \Sigma \Sigma (z X_e - x Z_e) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Полученныя такимъ образомъ шесть необходимыхъ условій (2) и (3) могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

Для равновѣсія произвольной системы необходимо, чтобы сумма проекцій внѣшнихъ силъ на каждую изъ трехъ осей и сумма моментовъ этихъ силъ около каждой изъ трехъ осей были равны нулю.

Эти условія можно также формулировать независимо отъ всякой системы осей слѣдующимъ образомъ:

Для равновѣсія произвольной системы нужно, чтобы внѣшнія силы представляли собой систему приложенныхъ векторовъ, эквивалентную нулю.

89. Примѣры. — 1° Вообразимъ сосудъ съ водой, находящейся въ равновѣсіи подѣйствию силы тяжести. Разсматриваемая система состоитъ изъ частицъ воды. Взаимодѣйствія между этими частицами являются внутренними силами. Внѣшнія силы — это дѣйствія на точки нашей системы, производимыя тѣлами, не принадлежащими къ системѣ, а именно: 1° вѣсъ частицъ воды; 2° дѣйствія стѣнокъ сосуда на соприкасающіяся съ ними частицы воды; 3° давленіе воздуха на свободную поверхность. Для существованія равновѣсія необходимо, чтобы совокупность всѣхъ этихъ внѣшнихъ силъ представляла собой систему приложенныхъ векторовъ, эквивалентную нулю.

2° Вообразимъ тяжелую цѣпь, подвѣшенную двумя ея концами къ двумъ неподвижнымъ точкамъ A и B . Къ цѣпи приложены слѣдующія внѣшнія силы: 1° силы вѣса различныхъ звеньевъ ея и 2° дѣйствія, производимыя неподвижными точками A и B : цѣпь тянетъ эти двѣ точки и, обратно, эти точки дѣйствуютъ на цѣпь съ силами F_A и F_B , приложенными къ концамъ цѣпи. Для равновѣсія необходимо, чтобы система этихъ внѣшнихъ силъ была эквивалентна нулю. Силы вѣса составляютъ систему параллельныхъ векторовъ, эквивалентную одному вектору P , равному вѣсу цѣпи и приложенному къ ея центру тяжести; три вектора P , F_A , F_B должны, слѣдовательно, составлять систему, эквивалентную нулю.

3° Твердая тѣла. — Если разсматриваемая система представляетъ собой твердое тѣло, то шесть условій равновѣсія, которыя мы только-что указали, какъ необходимыя для произвольной системы, оказываются также достаточными: въ этомъ мы убѣдимся ниже.

90. Часть произвольной системы; шесть необходимыхъ условій равновѣсія. — Въ системѣ S матеріальныхъ точекъ выдѣлимъ мысленно произвольную часть, составляющую систему S_1 такъ, чтобы наша система раздѣлилась на двѣ части: на точки системы S_1 и на остальные точки, составляющія систему $(S - S_1)$. Если вся система въ

равновѣсія, то и въ каждой изъ ея частей, — на примѣръ, въ S_1 — имѣть мѣсто равновѣсіе. Поэтому изложенное нами можно примѣнить къ части S_1 , рассматривая послѣднюю, какъ систему въ равновѣсіи. Внешнія по отношенію къ части S_1 силы, приложенныя къ ней, должны составлять систему приложенныхъ векторовъ, эквивалентную нулю. Такимъ образомъ, беря послѣдовательно различныя части полной системы, мы получимъ всѣ необходимыя условія равновѣсія.



ГЛАВА V.

РАВНОВѢСІЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

I. — СИЛЫ, ПРИЛОЖЕННЫЯ КЪ ТВЕРДОМУ ТѢЛУ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ ОПЕРАЦІИ.

91. Твердое тѣло. Твердое тѣло есть совокупность матеріальныхъ точекъ, неизмѣнно связанныхъ между собой.— О силѣ, приложенной къ одной изъ этихъ точекъ, принято говорить, что она приложена къ тѣлу. Определенное такимъ образомъ твердое тѣло представляетъ собой абстракцію. Въ природѣ всѣ тѣла деформируются подѣ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ силъ; но тѣла, обычно называемыя твердыми, подвергаются очень малымъ деформациямъ, которыми въ первомъ приближеніи можно пренебречь, если только силы не слишкомъ велики.

Согласно общимъ теоремамъ, относящимся къ равновѣсію произвольной системы, для равновѣсія твердаго тѣла подѣ дѣйствіемъ определенныхъ внѣшнихъ силъ необходимо, чтобы эти силы составляли систему приложенныхъ векторовъ, эквивалентную нулю.

Но для случая твердаго тѣла это необходимое условіе оказывается также и достаточнымъ. Для доказательства этого мы будемъ разсматривать слѣдующее предложеніе, какъ очевидное:

Для равновѣсія двухъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, необходимо и достаточно, чтобы онѣ были равны и прямопротивоположны.

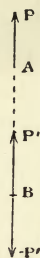
Допустивъ справедливость этого предложенія, мы прежде всего выполнимъ приведеніе приложенныхъ къ твердому тѣлу силъ при помощи метода Пуансо, основаннаго на теоріи паръ. Это приведеніе основано на разсмотрѣніи слѣдующихъ элементарныхъ операций.

92. Элементарныя операціи. — Если твердое тѣло находится подѣ дѣйствіемъ произвольнаго числа силъ, то, не измѣняя состоянія тѣла, можно послѣднія подвергнуть слѣдующимъ операціямъ, которыя мы назовемъ элементарными:

1° Можно, не измѣняя состоянія твердаго тѣла, присоединить къ нему или отнять отъ него систему двухъ равныхъ и прямопротивоположныхъ силъ.

2° Можно, не измѣняя дѣйствія силы, приложенной къ твердому тѣлу, перенести ее въ произвольную точку по линіи ея дѣйствія, если только эта новая точка неизмѣнно связана съ твердымъ тѣломъ.

Второе предложеніе вытекаетъ изъ перваго. Дѣйствительно, предположимъ, что одна изъ силъ, а именно сила P , приложена къ точкѣ A твердаго тѣла (фиг. 79); продолжимъ неопредѣленно ли-



Фиг. 79.

нію дѣйствія этой силы AP и возьмемъ на этой линіи точку B , неизмѣнно связанную съ тѣломъ. Мы можемъ, не измѣняя состоянія тѣла, приложить къ точкѣ B двѣ равныя и прямопротивоположныя силы, изъ которыхъ одна P' геометрически равна силѣ P а другая — P' равна ей по величинѣ и прямопротивоположна. Но теперь мы можемъ, опять же не измѣняя состоянія тѣла, удалить двѣ равныя и прямопротивоположныя силы P и $-P'$; такимъ образомъ, мы, не измѣняя состоянія тѣла, замѣнили силу AP новой силой BP' , полученной путемъ перенесенія силы AP въ нѣкоторую точку, лежащую на линіи дѣйствія силы.

Эта теорема доказываетъ, что сила, приложенная къ твердому тѣлу, можетъ быть представлена приложеннымъ векторомъ; мы можемъ, слѣдовательно, примѣнить къ ней всѣ опредѣленія и геометрическія свойства, указанныя въ параграфѣ III главы I.

3° Можно, не измѣняя состоянія твердаго тѣла, замѣнить сходящіяся силы ихъ равнодѣйствующей или разложить силу на сходящіяся силы. — Дѣйствительно, если нѣсколько силъ расположены по прямымъ, сходящимся въ точкѣ A , то мы можемъ всегда перенести ихъ въ точку A , предполагая, что она связана съ тѣломъ, и затѣмъ сложить ихъ въ одну силу по правилу сложения силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ. Обратно, силу, приложенную въ точкѣ A , мы всегда можемъ разложить на двѣ силы или на большее число силъ, приложенныхъ въ этой точкѣ; каждую изъ этихъ составляющихъ мы можемъ затѣмъ перенести въ произвольную точку по ея линіи дѣйствія.

Замѣчаніе. — Инвариантныя свойства геометрической суммы силъ и ихъ результирующаго (главнаго) момента около точки. — Даны силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенныя къ твердому тѣлу; выберемъ точку O и построимъ геометрическую сумму $\overrightarrow{OR}$ и результирующий моментъ $\overrightarrow{OG}$ силъ около этой точки.

Элементарныя операціи не измѣняютъ этихъ двухъ векторовъ OR и OG .

Другими словами, если мы при помощи этихъ операцій преобразуемъ данную систему силъ въ другую, то новая система будетъ имѣть такую же геометрическую сумму OR и такой же результирующий моментъ OG , какъ и прежняя система.

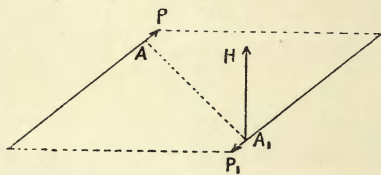
Для доказательства достаточно показать, что векторы OR и OG не измѣняются при выполненіи каждой изъ элементарныхъ операцій. Это очевидно для первыхъ двухъ операцій; для третьей операціи наше предложеніе вытекаетъ изъ слѣдующихъ двухъ положеній: 1° геометрическая сумма нѣсколькихъ векторовъ не измѣняется при замѣщеніи нѣкоторыхъ изъ нихъ ихъ геометрической суммой; 2° моментъ около опредѣленной точки результирующаго вектора системы приложенныхъ сходящихся векторовъ равенъ геометрической суммѣ моментовъ составляющихъ векторовъ.

II. — ПАРЫ.

93. Пара. — Парой силъ или просто парой называется совокупность двухъ приложенныхъ къ твердому тѣлу равныхъ и параллельныхъ силъ, обращенныхъ въ противоположныя стороны. Предполагая, что общее напряженіе этихъ двухъ силъ равно P , мы будемъ обыкновенно обозначать одну изъ силъ черезъ P , а другую черезъ P_1 .

Осевой моментъ пары. — Обозначимъ черезъ B произвольную точку пространства; въ теоріи векторовъ (стр. 22) мы видѣли, что результирующий моментъ BH двухъ силъ P и P_1 сохраняетъ неизмѣнную величину и направленіе и обращенъ въ одну и ту же сторону, какую бы мы ни взяли точку B .

Этотъ результирующий моментъ называется осевымъ моментомъ или осью пары. Такимъ образомъ, осевой моментъ является определеннымъ векторомъ въ отношеніи величины, направленія и стороны, но не въ отношеніи положенія, потому что его точкой приложенія можно считать любую точку B въ пространствѣ: это — свободный векторъ. Чтобы получить элементы этого осевого момента (величину, направленіе и сторону), достаточно взять результирующий моментъ пары около какой-нибудь одной точки, напирмѣръ, около точки A_1 , взятой на одной изъ силъ пары P_1 ; осевой моментъ есть главный моментъ двухъ векторовъ P и P_1 около точки A_1 (фиг. 80); такъ какъ моментъ вектора P_1 равенъ нулю,



Фиг. 80.

то осевой моментъ сводится къ моменту A_1H вектора P около точки A_1 ; онъ равенъ, слѣдовательно, произведенію длины P на кратчайшее разстояніе AA_1 между двумя векторами, перпендикуляренъ къ плоскости пары и направленъ такъ, что прямая, соединяющая точку, движущуюся по направленію вектора P , съ

точкой A_1 , вращается въ положительномъ направленіи около оси A_1H . Разстояніе между двумя силами называется плечомъ пары; величина осевого момента $P \times AA_1$ называется моментомъ пары. Легко видѣть, что этотъ моментъ равенъ площади параллелограмма, построеннаго на двухъ силахъ пары.

Если моментъ пары равенъ нулю, то либо множитель P равенъ нулю, и обѣ силы пары равны нулю, либо же плечо пары AA_1 равно нулю; въ послѣднемъ случаѣ двѣ силы пары равны и прямо противоположны, и мы можемъ ихъ отбросить.

94. Основная теорема. — Можно, не измѣняя состоянія твердаго тѣла, замѣнить приложенную къ нему пару другой парой, если только ось этой второй пары имѣетъ такую же длину и направленіе и обращена въ ту же сторону, что и ось первой пары.

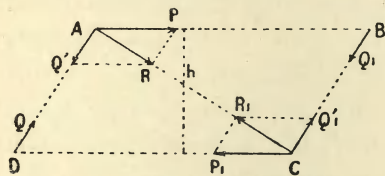
Формулируя кратко эту теорему, мы можемъ сказать: двѣ пары съ одинаковыми осевыми моментами эквивалентны въ твердомъ тѣлѣ.

Для доказательства этой теоремы мы покажемъ что при помощи элементарныхъ операций можно преобразовать одну пару въ любую другую пару съ одинаковымъ осевымъ моментомъ.

При доказательствѣ мы будемъ различать два случая.

1° Пары съ одинаковымъ осевымъ моментомъ, которыя мы желаемъ преобразовать другъ въ друга, расположены въ одной и той же плоскости.

Предположимъ сначала, что силы этихъ двухъ паръ непараллельны; въ такомъ случаѣ направленія этихъ силъ образуютъ параллелограммъ $ABCD$ (фиг. 81); такъ какъ сила можетъ быть



Фиг. 81.

перенесена въ любую точку по ея направленію, то мы можемъ считать силы двухъ паръ приложенными къ четыремъ вершинамъ па-

раллелограмма: силы P и P_1 первой пары — къ вершинамъ A и C , а силы Q и Q_1 второй пары — къ вершинамъ D и B .

Пусть h будетъ разстояніе между сторонами AB и DC ; моментъ первой пары Ph такъ относится къ площади параллелограмма $AB.h$, какъ AP къ AB ; точно такъ же моментъ второй пары такъ относится къ площади параллелограмма, какъ DQ къ AD ; такъ какъ эти моменты равны, то мы имѣемъ пропорцію:

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AD}. \quad (1)$$

Оси двухъ паръ равны и параллельны; для того, чтобы онѣ были обращены въ одну сторону (обѣ направлены впередъ отъ плоскости фигуры), необходимо, чтобы силы имѣли одно и то же направление вращенія по периметру параллелограмма.

Предполагая, что это имѣетъ мѣсто, будемъ исходить отъ пары P, P_1 и присоединимъ къ ней вдоль стороны AD двѣ равныя и прямо противоположныя силы: силу Q въ точкѣ D и силу Q' , приложенную въ вершинѣ A ; точно такъ же присоединимъ вдоль стороны BC двѣ равныя и прямо противоположныя силы Q_1 и Q'_1 , приложенныя соотвѣтственно въ вершинахъ B и C . Мы получили систему силъ, эквивалентную парѣ P, P_1 ; но система силъ P, P_1, Q', Q'_1 эквивалентна нулю, потому что двѣ силы P и Q' имѣютъ равнодѣйствующую R , которая въ силу пропорціи (1) направлена по діагонали AC , а двѣ силы P_1 и Q'_1 имѣютъ равнодѣйствующую R_1 , направленную по діагонали CA , т. е. равную и прямопротивоположную силѣ R ; мы можемъ, слѣдовательно, отбросить взаимно уничтожающіяся силы P, P_1, Q', Q'_1 , и останется пара Q, Q_1 , эквивалентная первой.

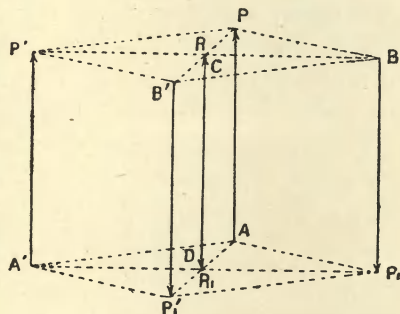
Въ случаѣ, когда силы двухъ паръ съ одинаковымъ осевымъ моментомъ параллельны, предыдущее разсужденіе уже не можетъ быть примѣнено; но мы можемъ разсмотрѣть въ этой же плоскости вспомогательную пару F, F_1 , которая имѣетъ тотъ же осевой моментъ, что и двѣ данныя, но силы которой не параллельны силамъ данныхъ паръ; согласно предыдущему, мы преобразуемъ пару P, P_1 въ пару F, F_1 , а затѣмъ послѣднюю въ пару Q, Q_1 , т. е. пару P, P_1 мы окончательно преобразуемъ въ пару Q, Q_1 .

Итакъ, мы можемъ произвольно переносить пару въ ея плоскости и измѣнять ея плечо и силы, если только ея ось при этомъ не измѣняется.

2° Докажемъ теперь, что пару можно переносить въ плоскость, параллельную ей плоскости, а также измѣнять плечо пары и ея силы, если только ось при этомъ остается неизмѣнной.

Для этого достаточно доказать, что пара можетъ быть перенесена параллельно самой себѣ въ плоскость, параллельную ей собственной плоскости: перенеся пару въ эту плоскость, мы можемъ измѣнять затѣмъ пару по правиламъ, относящимся къ первому случаю.

Пусть P, P_1 (фиг. 82) будетъ пара силъ, P', P'_1 — та же пара, перенесенная параллельно самой себѣ въ другую плоскость; пусть A, B, A', B' будутъ точки приложенія силъ этихъ двухъ паръ. Построимъ параллелепипедъ, въ которомъ эти четыре силы служатъ противоположными ребрами, и возьмемъ точки пересѣченія C и D діагоналей двухъ граней $PP'BB'$ и $P_1P'_1AA'$. Исходя отъ первой пары P, P_1 , приложимъ вдоль прямой CD двѣ равныя и прямопротивоположныя силы R, R_1 , равныя отрѣзку CD , т. е. силѣ P . Пара P, R_1 можетъ быть замѣнена, какъ это было указано въ предыдущемъ случаѣ, парой R, P'_1 , лежащей въ одной



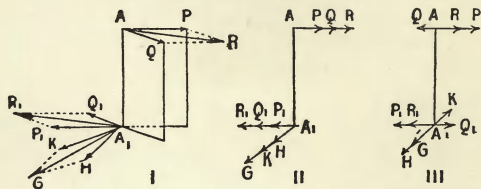
Фиг. 82.

плоскости съ первой; точно такъ же пара P_1, R можетъ быть замѣнена парой R_1, P' ; такимъ образомъ первоначальная пара замѣняется двумя парами R, P'_1 и R_1, P' , которыя, очевидно, приводятся къ парѣ P', P'_1 , ибо равныя и прямопротивоположныя силы R, R_1 взаимно уничтожаются.

95. Сложеніе паръ. — Нѣсколько паръ могутъ быть замѣнены одной парой, осевой моментъ которой равенъ гео-

метрической суммѣ осевыхъ моментовъ составляющихъ паръ. — Докажемъ эту теорему сперва для двухъ паръ.

Двѣ произвольныя пары. — Рассмотримъ двѣ пары, осями которыхъ служатъ векторы H и K . Возьмемъ сперва общій случай, когда эти оси не параллельны (фиг. 83, I).



Фиг. 83.

Плоскости двухъ такихъ паръ пересѣкаются по нѣкоторой прямой. Пусть A и A_1 будутъ двѣ точки на этой прямой. Мы можемъ измѣнить каждую изъ паръ въ ея плоскости такъ, чтобы привести первую къ двумъ силамъ P и P_1 , приложеннымъ къ точкамъ A и A_1 перпендикулярно къ прямой AA_1 , а вторую пару — къ двумъ силамъ Q и Q_1 , приложеннымъ также въ точкахъ A и A_1 перпендикулярно къ прямой AA_1 . Силы P и Q даютъ равнодѣйствующую силу R , а равныя и прямопротивоположныя имъ силы P_1 и Q_1 — силу R_1 , равную и прямопротивоположную силѣ R . Такимъ образомъ мы замѣнили двѣ данныя пары одной парой R, R_1 . Если осевые моменты трехъ паръ приложить къ точкѣ A_1 , то осевые моменты A_1H и A_1K представляютъ собой моменты векторовъ P и Q около точки A_1 , а осевой моментъ A_1G результирующей пары будетъ моментомъ вектора R около той же точки. Но такъ какъ R есть равнодѣйствующая силъ P и Q , то моментъ A_1G этого вектора равенъ геометрической суммѣ моментовъ A_1H и A_1K , что и доказываетъ нашу теорему.

Частный случай, когда осевые моменты составляющихъ паръ имѣютъ одинаковое направленіе. — Въ этомъ случаѣ плоскости обѣихъ паръ параллельны, но, перенося одну изъ паръ, можно привести обѣ пары къ одной и той же плоскости. Въ этой плоскости мы возьмемъ двѣ точки A и A_1 и приведемъ каждую пару къ двумъ силамъ, приложеннымъ въ точкахъ A и A_1 перпендикулярно къ прямой AA_1 : первую пару къ двумъ

силамъ P и P_1 , вторую — къ двумъ силамъ Q и Q_1 . Если осевые моменты A_1H и A_1K двухъ составляющихъ паръ обращены въ одну сторону (фиг. 83, II), то силы P и Q , P_1 и Q_1 складываются, и мы получимъ пару $R = P + Q$, $R_1 = P_1 + Q_1$, осевой моментъ которой A_1G равенъ геометрической суммѣ двухъ осевыхъ моментовъ A_1H и A_1K . Въ этомъ случаѣ уголъ HA_1K , который мы имѣли въ общемъ случаѣ, равенъ нулю.

Если осевые моменты составляющихъ паръ обращены въ противоположныя стороны, при чемъ $A_1H > A_1K$ (фиг. 83, III), то силы P и Q , съ одной стороны, и силы P_1 и Q_1 , съ другой стороны, даютъ соотвѣтственно равнодѣйствующія $R = P - Q$ и $R_1 = P_1 - Q_1$, такъ что получится пара, осевой моментъ которой A_1G направленъ по A_1H и равенъ $A_1H - A_1K$; осевой моментъ A_1G попрежнему есть геометрическая сумма осевыхъ моментовъ A_1H и A_1K , но уголъ HA_1K здѣсь равенъ двумъ прямымъ.

Если осевые моменты H и K составляющихъ паръ равны и обращены въ противоположныя стороны, то силы P и Q , P_1 и Q_1 , приложенныя къ точкамъ A и A_1 , взаимно уничтожаются; силы R и R_1 результирующей пары равны нулю, ея осевой моментъ есть нуль и попрежнему равенъ геометрической суммѣ составляющихъ осевыхъ моментовъ.

Сложеніе n паръ. — Даны n паръ, имѣющихъ соотвѣтственно осевые моменты $G_1, G_2, \dots, G_n$. Двѣ первыя пары можно замѣнить результирующей парой, осевой моментъ которой H равенъ геометрической суммѣ осевыхъ моментовъ G_1 и G_2 ; затѣмъ пары H и G_3 можно замѣнить парой K , осевой моментъ которой есть геометрическая сумма осевыхъ моментовъ H и G_3 , т. е. геометрическая сумма осевыхъ моментовъ G_1, G_2, G_3 ; продолжая такимъ же образомъ, мы получимъ, наконецъ, пару, осевой моментъ которой G есть геометрическая сумма осевыхъ моментовъ $G_1, G_2, \dots, G_n$.

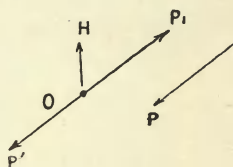
Согласно общей теоріи линейныхъ моментовъ, осевой моментъ G результирующей пары геометрически равенъ результирующему моменту всѣхъ силъ, изъ которыхъ состоятъ пары, около любой точки пространства.

Если осевой моментъ G результирующей пары равенъ нулю, то эта пара сама есть нуль, и совокупность данныхъ паръ при помощи элементарныхъ операций приводится къ нулю.

III. — ПРИВЕДЕНИЕ СИЛЪ, ПРИЛОЖЕННЫХЪ КЪ ТВЕРДОМУ ТѢЛУ.

96. Основная теорема. — Не измѣняя состоянія твердаго тѣла, можно замѣнить приложенную къ нему силу P геометрически равною ей силою P' , приложенною въ произвольной принадлежащей тѣлу точкѣ O и парой, осевой моментъ которой есть моментъ силы P около точки O .

Дѣйствительно, возьмемъ въ тѣлѣ, находящемся подъ дѣйствіемъ силы P , произвольную точку O и приложимъ къ этой точкѣ силу P' , равную и параллельную силѣ P и обращенную въ одну съ ней сторону, а также силу P_1 , равную и прямопротивоположную силѣ P (фиг. 84); состояніе тѣла отъ этого не измѣнится. Двѣ



Фиг. 84.

силы P и P_1 составляютъ пару, которой осевой моментъ OH есть моментъ силы P около точки O . Мы видимъ, слѣдовательно, что сила P замѣнена силою P' и парой P, P_1 съ осью OH , перпендикулярной къ силѣ P' . Теорема наша такимъ образомъ доказана.

Обратно, совокупность силы P' и пары, которой ось OH перпендикулярна къ силѣ P' , приводится къ одной только силѣ P , которая равна и параллельна силѣ P' и обращена въ одну съ ней сторону.

Дѣйствительно, плоскость пары съ осью OH содержитъ силу OP' ; мы можемъ, не измѣняя оси этой пары, измѣнить ея силы и ея плечо такимъ образомъ, чтобы силы имѣли такое же напряжение, какъ сила P' . Мы можемъ затѣмъ повернуть эту пару

въ ея плоскости такъ, чтобы одна изъ ея силъ приняла положеніе силы P_1 , равной и прямопротивоположной силѣ P' , при чемъ другая приметъ нѣкоторое положеніе P . Силы P' и P_1 взаимно уничтожаются, и останется одна только сила P , которая равна и параллельна силѣ P' , обращена въ одну съ ней сторону и имѣетъ моментъ около точки O , равный осевому моменту OH .

97. Приведеніе силъ. — Силы, приложенныя въ произвольномъ числѣ къ твердому тѣлу, всегда могутъ быть приведены къ одной силѣ, равной ихъ геометрической суммѣ и приложенной въ произвольно взятой точкѣ O , и парѣ, осевой моментъ которой есть результирующий моментъ данныхъ силъ около точки O .

Предположимъ, что къ твердому тѣлу приложены силы $F_1, F_2, \dots, F_n$. Возьмемъ произвольную точку O тѣла. Силу F_1 мы можемъ замѣнить приложенной въ точкѣ O силой OF'_1 , геометрически равной силѣ F_1 , и парой, ось которой OG_1 есть моментъ силы F_1 около точки O ; мы можемъ точно такъ же замѣнить силы $F_2, \dots, F_n$ геометрически равными имъ силами $F'_2, \dots, F'_n$, приложенными къ точкѣ O , и парами, оси которыхъ $OG_2, \dots, OG_n$ суть моменты силъ $F_2, \dots, F_n$ около точки O .

Сходящіяся силы $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ складываются въ одну силу R , равную геометрической суммѣ данныхъ силъ. Пары съ осевыми моментами $OG_1, OG_2, \dots, OG_n$ складываются въ одну пару, осевой моментъ которой OG , равный геометрической суммѣ осевыхъ моментовъ $OG_1, OG_2, \dots, OG_n$, представляетъ собой результирующий моментъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$ около точки O .

Теорема наша такимъ образомъ доказана.

Такъ какъ точка O можетъ быть выбрана произвольно, то приведеніе силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$ къ одной силѣ и одной парѣ можетъ быть выполнено безчисленнымъ множествомъ способовъ.

Каждому положенію точки O соответствуетъ приведеніе по предыдущему методу. Съ измѣненіемъ точки O сила OR сохраняетъ неизмѣнную величину и постоянное направленіе, но ось OG пары вообще измѣняется.

Сила $\overrightarrow{OR}$ и пара $\overrightarrow{OG}$ называются результирующей силой и результирующей парой относительно точки O . Онѣ называются элементами приведенія системы силъ въ точкѣ O .

98. Аналитическое опредѣленіе элементовъ приведенія. — Всѣ теоремы и вычисления, относящіяся къ приложеннымъ векторамъ (глава I, § III), могутъ быть примѣнены къ силамъ $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложеннымъ къ твердому тѣлу.

Возьмемъ три прямоугольныя оси $Oxyz$; пусть X_k, Y_k, Z_k будутъ проекціи силы F_k на эти оси и

$$L_k = y_k Z_k - z_k Y_k, \quad M_k = z_k X_k - x_k Z_k, \quad N_k = x_k Y_k - y_k X_k,$$

— ея моменты около осей. Если сдѣлать приведеніе въ точкѣ O , то мы получимъ силу $\overrightarrow{OR}$, равную геометрической суммѣ силъ, и пару, осевой моментъ которой $\overrightarrow{OG}$ есть результирующий моментъ силъ около точки O . Назовемъ черезъ X, Y, Z проекціи силы OR , и черезъ L, M, N проекціи момента $\overrightarrow{OG}$; мы имѣемъ (п. 14):

$$\begin{array}{lll} (OR) & X = \Sigma X_k, & Y = \Sigma Y_k, & Z = \Sigma Z_k, \\ (OG) & L = \Sigma L_k, & M = \Sigma M_k, & N = \Sigma N_k. \end{array}$$

При помощи формулъ п. 14 мы можемъ получить проекціи L', M', N' результирующего момента $O'G'$ (осевого момента пары) около всякой другой точки пространства. Мы можемъ такимъ образомъ изучить измѣненіе осевого момента, когда приведеніе производится относительно различныхъ точекъ пространства. Припомнимъ главные теоремы и укажемъ ихъ реальное значеніе.

1° Когда точка O' мѣняется, проекція осевого момента $O'G'$ пары на постоянное направленіе результирующей силы $O'R'$ остается постоянной.

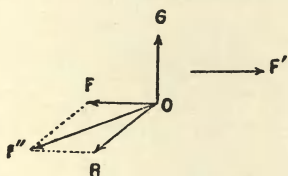
2° Центральная ось системы силъ есть геометрическое мѣсто точекъ O' , отличающихся тѣмъ свойствомъ, что результирующий моментъ относительно любой изъ этихъ точекъ параллеленъ постоянно-му направленію $O'R'$ результирующего вектора. Слѣдовательно, въ дѣйствительности эта ось есть геометрическое мѣсто точекъ O' , отличающихся тѣмъ свойствомъ, что при приведеніи въ точкѣ O' осевой моментъ $O'G'$ полученной пары имѣетъ такое же направленіе, какъ и полученная сила. Этотъ осевой моментъ имѣетъ тогда наи-

меньшее изъ всѣхъ возможныхъ для него значеній; если направленіе силы $O'R'$ считать положительнымъ, то алгебраическое выраженіе осевого момента будетъ

$$g = G \cos \angle RG = \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

99. Приведеніе системы силъ къ двумъ силамъ. — Силы, приложенныя къ твердому тѣлу, всегда могутъ быть приведены къ двумъ силамъ, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ произвольно взятую точку.

Обозначивъ черезъ O произвольно взятую точку, мы можемъ привести силы къ одной силѣ OR , приложенной въ точкѣ O , и къ парѣ съ осью OG . Пара состоитъ изъ двухъ равныхъ и прямопротивоположныхъ силъ F и F' , лежащихъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси OG (фиг. 85). Перенесемъ эту пару параллельно



Фиг. 85.

ей самой такъ, чтобы сила F оказалась приложенной въ точкѣ O , при чемъ другая сила займетъ положеніе F' . Сходящіяся силы OR и OF даютъ равнодѣйствующую F'' , и рассматриваемая система силъ приводится къ двумъ силамъ F' и F'' , изъ которыхъ сила F'' проходитъ черезъ произвольно выбранную точку O .

Слѣдуетъ замѣтить, что послѣ того, какъ точка O уже выбрана, силы F' и F'' еще не будутъ вполне определенными, и система еще безконечнымъ множествомъ способовъ можетъ быть приведена къ двумъ силамъ, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ точку O . Дѣйствительно, оставивъ точку приложенія силы F въ O , мы можемъ вращать пару FF' въ плоскости, перпендикулярной къ прямой OG въ точкѣ O , и въ то же время измѣнять силы и плечо пары, лишь бы только при этомъ ея осевой моментъ OG оставался неизмѣннымъ. Эти измѣненія повлекутъ за собой измѣненія силъ F' и F'' .

IV. — ОБЩІЯ УСЛОВІЯ РАВНОВѢСІЯ СВОБОДНАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА.

100. Равновѣсіе. — Если силы, приложенныя къ твердому тѣлу, приведены къ одной силѣ OR и одной парѣ съ осевымъ моментомъ OG , то для равновѣсія тѣла необходимо и достаточно, чтобы эта сила и эта пара были равны нулю.

Дѣйствительно, обозначимъ, какъ въ предыдущемъ пунктѣ, черезъ F и F' двѣ силы пары, при чемъ сила F приложена къ точкѣ O . Тогда силы приводятся къ двумъ: къ силѣ F' пары и силѣ F'' равнодѣйствующей силѣ F и R , приложенной къ точкѣ O . Для равновѣсія тѣла необходимо, чтобы двѣ полученныя въ результатѣ силы F' и F'' уравнивались, т. е. чтобы онѣ были равны и прямопротивоположны (п. 91). Но если двѣ силы равны и прямопротивоположны, то основаніе одной проходитъ черезъ точку приложенія другой: основаніе силы F' должно поэтому проходить черезъ точку O , и моментъ пары F, F' долженъ быть нулемъ, такъ какъ сила F приложена къ точкѣ O . Слѣдовательно, этимъ доказано, что осевой моментъ OG равенъ нулю. Такъ какъ пара равна нулю, то силы приводятся къ одной лишь силѣ OR , которая въ случаѣ равновѣсія тѣла тоже должна быть нулемъ.

Итакъ, изложенныя условія являются необходимыми, что мы могли знать напередъ, такъ какъ эти условія представляются универсальными необходимыми условіями равновѣсія произвольной системы.

Но для случая твердаго тѣла эти условія, очевидно, будутъ также и достаточными: дѣйствительно, если сила OR и моментъ OG равны нулю, то при помощи элементарныхъ операций силы могутъ быть приведены къ нулю.

Итакъ, для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма OR силъ и ихъ результирующій моментъ OG около точки O были равны нулю.

101. Пара не имѣетъ равнодѣйствующей. — Дѣйствительно, если бы пара съ осевымъ моментомъ G , отличнымъ отъ нуля,

могла быть замѣщена одной силой OR , то эта же самая пара могла бы уравновѣшиваться силой OR_1 , равной и прямопротивоположной силѣ OR . Но, согласно общимъ условіямъ равновѣсія, это не возможно, если осевой моментъ пары G не есть нуль.

102. Приведеніе системы данныхъ силъ къ одной силѣ, приложенной къ точкѣ O , и къ одной парѣ возможно только однимъ способомъ. — Дѣйствительно, предположимъ, что различными путями мы привели систему силъ S сперва къ силѣ OR и парѣ съ осью OG , а затѣмъ къ силѣ OR' и парѣ съ осью OG' . Докажемъ геометрическія равенства:

$$OR' = OR, \quad OG' = OG.$$

Такъ какъ система S можетъ быть замѣнена силой OR и парой съ осью OG , то она можетъ уравновѣшиваться силой — (OR) , равной и прямопротивоположной силѣ OR , и парой съ осью — (OG) , равной и прямопротивоположной оси OG . Такъ какъ, съ другой стороны, наша система можетъ быть замѣнена силой OR' и парой OG' , то система, образуемая двумя силами OR' и — (OR) и двумя парами OG' и — (OG) , должна быть въ равновѣсіи. Силы (OR') и — (OR) даютъ результирующую OR_1 , пары OG' и — (OG) даютъ результирующую пару OG_1 . Такъ какъ имѣется равновѣсіе, то

$$OR_1 = 0, \quad OG_1 = 0.$$

Слѣдовательно, сила OR' равна и прямопротивоположна силѣ — (OR) , т. е. геометрически равна результирующей силѣ OR , а ось OG' равна и прямопротивоположна оси — (OG) , т. е. равна оси OG . Теорема наша такимъ образомъ доказана.

103. Аналитическія условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла. — Пусть Ox , Oy , Oz будутъ три прямоугольныя оси; построимъ геометрическую сумму OR и результирующій моментъ OG силъ около точки O , и пусть, какъ въ п. 98, X , Y , Z и L , M , N будутъ соотвѣтственно проекціи этихъ двухъ векторовъ на три оси. Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы векторъ OR и моментъ OG были равны нулю, т. е. необходимы и достаточны слѣдующія шесть универсальныхъ условій равновѣсія:

$$(\text{Равновѣсіе}) \left\{ \begin{array}{lll} X=0, & Y=0, & Z=0, \\ L=0, & M=0, & N=0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Эти шесть условий мы можем формулировать слѣдующимъ образомъ: для равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, необходимо и достаточно (при ограниченіяхъ, указанныхъ въ п. 91), чтобы сумма ихъ проекцій на каждую изъ трехъ координатныхъ осей была нулемъ, и чтобы сумма ихъ моментовъ около каждой изъ этихъ осей была нулемъ.

104. Частный случай: равновѣсіе сходящихся силъ. —

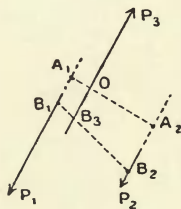
Въ этомъ случаѣ мы можемъ перенести силы въ точку схождения и привести ихъ къ одной силѣ. Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма силъ была равна нулю. Чтобы выразить это аналитически, возьмемъ точку схождения за начало; мы видимъ, что проекціи L , M , N сами по себѣ суть нули, а потому достаточно написать три условія:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0.$$

105. Равновѣсіе трехъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. — I. Равновѣсіе трехъ сходящихся силъ. Предположимъ, что на твердое тѣло дѣйствуютъ три силы, сходящіяся въ точкѣ O . Мы всегда можемъ перенести ихъ въ точку O . Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы ихъ геометрическая сумма была нулемъ.

II. Равновѣсіе трехъ параллельныхъ силъ. — Возьмемъ теперь три параллельныя силы и разыщемъ условія ихъ равновѣсія.

Изъ этихъ трехъ силъ двѣ обращены въ одну и ту же сторону, которую мы будемъ считать положительной, а третья обра-



Фиг. 86.

щена въ противоположную сторону. Мы будемъ считать напряженія P_1 и P_2 двухъ первыхъ силъ положительными (фиг. 86), а

напряженіе P_3 третьей силы отрицательнымъ. Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы сила P_3 была равна и прямопротивоположна равнодѣйствующей силъ P_1 и P_2 .

Отсюда мы заключаемъ, что для равновѣсія трехъ параллельныхъ силъ необходимо и достаточно,

1° чтобы сила P_3 была противоположна двумъ другимъ и по абсолютной величинѣ была равна ихъ суммѣ,

2° чтобы она проходила между этими двумя силами въ ихъ плоскости, и

3° чтобы отрѣзки, на которые сила P_3 дѣлитъ прямую, пересекающую всѣ три силы, были обратно пропорціональны силамъ P_1 и P_2 .

Эти условія мы могли бы легко найти, выразивъ, что геометрическая сумма силъ есть нуль, и что результирующий моментъ около точки O , черезъ которую проходитъ сила P_3 , равенъ нулю.

III. Равновѣсіе трехъ произвольныхъ силъ. — Найдемъ, наконецъ, условія равновѣсія трехъ произвольныхъ силъ P , Q , R , приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Прежде всего для равновѣсія необходимо, чтобы всѣ три силы находились въ одной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую-либо точку O на основаніи силы R : необходимо, чтобы геометрическая сумма моментовъ трехъ силъ около точки O была нулемъ. Въ виду того, что моментъ силы R самъ по себѣ равенъ нулю, необходимо, чтобы моменты силъ P и Q были равны и прямопротивоположны. Такъ какъ эти моменты перпендикулярны къ плоскостямъ, опредѣляемымъ точкой O и каждой изъ силъ P и Q , то эти двѣ плоскости должны совпасть. Мы нашли такимъ образомъ, что двѣ силы P и Q находятся въ плоскости, содержащей точку O , произвольно взятую на силѣ R : для этого необходимо, чтобы три силы находились въ одной плоскости.

Предположимъ, что это первое условіе выполнено; тогда могутъ представиться два случая:

Первый случай. — Двѣ силы P и Q сходятся; въ такомъ случаѣ мы можемъ сложить ихъ въ одну силу R' ; для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы третья сила R была равна и прямопротивоположна силѣ R' . Итакъ, если двѣ изъ данныхъ силъ сходятся, то для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы три

силы были сходящимися и удовлетворяли указаннымъ выше условіямъ равновѣсія трехъ сходящихся силъ.

Второй случай. — Три силы P , Q и R параллельны; въ такомъ случаѣ онѣ должны удовлетворять даннымъ выше условіямъ равновѣсія трехъ параллельныхъ силъ.

Итакъ, для равновѣсія трехъ силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, необходимо, чтобы онѣ лежали въ одной плоскости и чтобы въ этой плоскости онѣ были сходящимися или параллельными и удовлетворяли, слѣдовательно, условіямъ равновѣсія трехъ сходящихся или параллельныхъ силъ.

У. — ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХЪ СИСТЕМЪ СИЛЪ, ПРИЛОЖЕННЫХЪ КЪ ТВЕРДОМУ ТѢЛУ. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПРИВЕДЕНІЯ.

106. Условія эквивалентности двухъ системъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. — Вообразимъ двѣ системы силъ S и S' , приложенныхъ послѣдовательно къ одному и тому же твердому тѣлу; первая система S состоитъ изъ n силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$, а вторая S' — изъ n' силъ $F'_1, F'_2, \dots, F'_{n'}$. Эти двѣ системы называются эквивалентными, если одну изъ нихъ можно замѣнить другой, не измѣняя состоянія твердаго тѣла.

Выбравъ точку O , мы можемъ привести первую систему къ силѣ OR , приложенной къ точкѣ O , и къ парѣ съ осью OG ; точно такъ же мы можемъ привести вторую систему къ силѣ OR' и парѣ OG' . Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ слѣдующей теоремѣ:

Для эквивалентности двухъ системъ силы S и S' необходимо и достаточно, чтобы имѣли мѣсто геометрическія равенства

$$OR' = OR, \quad OG' = OG,$$

т. е., чтобы обѣ системы имѣли одинаковую геометрическую сумму (главный векторъ) и одинаковый результирующий (главный) моментъ около точки O , иначе говоря, чтобы

двѣ системы силъ удовлетворяли условіямъ эквивалентности двухъ системъ приложенныхъ векторовъ (п. 16).

1° Указанное условіе необходимо. — Дѣйствительно, если двѣ системы эквивалентны, то сила OR' и пара OG' должны уравновѣшиваться силой — (OR) , равной и противоположной силѣ OR , и парой съ осью — (OG) , равной и противоположной оси OG . Въ такомъ случаѣ, какъ въ п. 102, геометрическая сумма силъ OR' и — (OR) и геометрическая сумма осей OG' и — (OG) должны быть нулями; слѣдовательно, сила OR' равна и противоположна силѣ — (OR) , т. е. тождественна съ OR ; осевой моментъ OG' равенъ и противоположенъ осевому моменту — (OG) , т. е. тождественъ съ осевымъ моментомъ OG .

3° Указанное условіе достаточно. — Если оно выполняется, то двѣ системы могутъ быть приведены къ одной и той же силѣ OR и одной и той же парѣ OG .

107. Частные случаи приведенія. — Найдемъ, въ частности, при какихъ условіяхъ система силъ S эквивалентна одной парѣ или одной силѣ.

1° Для того, чтобы система была эквивалентна одной парѣ, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма силъ была нулемъ.

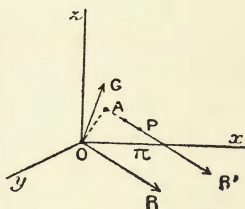
Это условіе необходимо, потому что геометрическая сумма двухъ силъ пары равна нулю; оно, очевидно, достаточно, потому что силы приводятся къ парѣ съ осевымъ моментомъ OG , когда результирующая сила OR равна нулю.

2° Для того, чтобы система силъ была эквивалентна одной силѣ, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма силъ не была нулемъ и чтобы результирующий моментъ былъ перпендикуляренъ къ направленію этой суммы.

Это условіе необходимо. Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что система силъ S эквивалентна одной силѣ R' . Система S имѣетъ такую же геометрическую сумму и такой же результирующий моментъ, какъ и единственная сила R' . Поэтому геометрическая сумма OR этой системы равна и параллельна силѣ R' , а результи-

рующей моментъ OG системы тождественъ съ моментомъ силы R' ; но этотъ моментъ OG перпендикуляренъ къ силѣ R' , т. е. къ параллельной ей геометрической суммѣ OR .

Указанное условіе также достаточно. Предположимъ, что въ нѣкоторой системѣ результирующий моментъ OG перпендикуляренъ



Фиг. 87.

къ геометрической суммѣ OR ; мы должны доказать, что эта система эквивалентна одной силѣ, параллельной результирующей силѣ OR . Но въ этомъ случаѣ система приводится къ силѣ OR и парѣ, которой ось OG перпендикулярна къ силѣ OR . Такая совокупность силы и пары приводится къ одной силѣ R' , которая параллельна результирующей силѣ OR и лежитъ въ плоскости, проведенной черезъ точку O перпендикулярно къ оси OG . Эта единственная сила направлена по центральной оси системы данныхъ силъ.

108. Заключение. — Предположимъ, что приведеніе данной системы силъ въ точку O даетъ силу R , приложенную въ точкѣ O , и пару съ осью G ; назовемъ черезъ (R, G) уголъ между этими двумя векторами. Мы можемъ представить результаты нашего изслѣдованія въ видѣ слѣдующей таблицы:

$RG \cos (R, G) \neq 0.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Система эквивалентна двумъ силамъ, не лежащимъ въ} \\ \text{одной плоскости; она эквивалентна также одной силѣ и} \\ \text{одной парѣ.} \end{array} \right.$
$RG \cos (R, G) = 0.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ R \neq 0. \left\{ \begin{array}{l} \text{Система эквивалентна одной силѣ, напра-} \\ \text{вленной по центральной оси.} \end{array} \right. \\ 2^\circ R = 0. \left\{ \begin{array}{l} \text{Система эквивалентна одной парѣ.} \\ G \neq 0. \end{array} \right. \\ 3^\circ R = 0, \left\{ \begin{array}{l} \text{Система эквивалентна нулю. Равновѣсіе.} \\ G = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$

109. Первый примѣръ: силы въ плоскости. — Разсмотримъ силы, которыя лежатъ всѣ въ одной плоскости xOy ; ихъ геометрическая сумма OR , очевидно, лежитъ въ этой плоскости, а ихъ главный моментъ OG перпендикуляренъ къ этой плоскости. Слѣдовательно, если геометрическая сумма OR не равна нулю, то силы эквивалентны одной единственной силѣ, лежащей въ этой плоскости. Эта единственная сила равна и параллельна главному вектору OR ; положеніе ея опредѣлится, если напишемъ, что ея моментъ около точки O равенъ результирующему моменту OG .

Если $OR = 0$, то силы эквивалентны одной парѣ, лежащей въ данной плоскости.

Если $OR = 0$ и $OG = 0$, то имѣетъ мѣсто равновѣсіе.

Чтобы выразить это аналитически, примемъ данную плоскость за плоскость xu ; мы имѣемъ, очевидно, уравненія:

$$\begin{aligned} Z &= 0, & L &= 0, & M &= 0, \\ LX + MY + NZ &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда мы заключаемъ:

Если $X^2 + Y^2 > 0$, то система имѣетъ лишь результирующую силу, лежащую въ данной плоскости и направленную по центральной оси $xY - yX = N$.

Если $X = 0$, $Y = 0$ и $N \geq 0$, то система приводится къ парѣ.

Если $X = 0$, $Y = 0$, $N = 0$, то система въ равновѣсіи.

Когда $N = 0$, то силы либо имѣютъ результирующую, проходящую черезъ точку O , либо взаимно уравновѣшиваются; слѣдовательно, если сумма моментовъ силъ около двухъ точекъ плоскости равна нулю, то результирующая сила проходитъ черезъ эти точки, или же имѣетъ мѣсто равновѣсіе; наконецъ, если эта сумма равна нулю для трехъ точекъ плоскости, не лежащихъ на одной прямой, то должно существовать равновѣсіе.

110. Параллельныя силы. — Вообразимъ твердое тѣло, находящееся подъ дѣйствіемъ параллельныхъ силъ. Если мы обозначимъ черезъ $P_1, P_2, \dots, P_n$ алгебраическія значенія этихъ силъ, то ихъ геометрическая сумма OR , будучи имъ параллельна, имѣетъ алгебраическую величину P , которая опредѣляется равенствомъ

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P_k.$$

Главный момент OG силъ около точки O перпендикуляренъ къ общему направленію этихъ силъ, потому что моментъ каждой силы перпендикуляренъ къ этому направленію. Слѣдовательно, въ настоящемъ случаѣ результирующий моментъ OG перпендикуляренъ къ геометрической суммѣ OR . Мы приходимъ поэтому къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1° Если $P \neq 0$, то силы даютъ лишь результирующую, которая геометрически равна суммѣ P и направлена по центральной оси.

Чтобы выразить это аналитически, обозначимъ, какъ въ п. 21, черезъ α , β , γ направляющіе косинусы нѣкоторой оси, ориентированной въ положительную сторону параллельныхъ силъ; проекціи одной изъ этихъ силъ P_k будутъ

$$X_k = \alpha P_k, \quad Y_k = \beta P_k, \quad Z_k = \gamma P_k;$$

моменты около осей той же силы, приложенной къ точкѣ x_k, y_k, z_k , пусть будутъ

$$L_k = \gamma P_k y_k - \beta P_k z_k, \quad M_k = \alpha P_k z_k - \gamma P_k x_k, \\ N_k = \beta P_k x_k - \alpha P_k y_k.$$

Сдѣлавъ приведеніе въ началѣ координатъ, мы получимъ уравненія:

$$(OR) \quad X = \alpha \Sigma P_k, \quad Y = \beta \Sigma P_k, \quad Z = \gamma \Sigma P_k,$$

$$(OG) \quad L = \gamma \Sigma P_k y_k - \beta \Sigma P_k z_k, \quad M = \alpha \Sigma P_k z_k - \gamma \Sigma P_k x_k, \quad N = \beta \Sigma P_k x_k - \alpha \Sigma P_k y_k.$$

Эти выраженія удовлетворяютъ соотношенію

$$LX + MY + NZ = 0,$$

которое показываетъ, что уголъ GOR прямой.

Если $X^2 + Y^2 + Z^2 > 0$, то существуетъ лишь главный векторъ $P = \Sigma P_k$, направленный по центральной оси D ; уравненія послѣдней

$$yZ - zY = L, \quad zX - xZ = M, \quad xY - yX = N$$

послѣ упрощенія (п. 21) примутъ слѣдующій видъ:

$$(D) \quad \frac{x - \xi}{\alpha} = \frac{y - \eta}{\beta} = \frac{z - \zeta}{\gamma},$$

гдѣ

$$(C) \quad \xi = \frac{\Sigma P_k x_k}{\Sigma P_k}, \quad \eta = \frac{\Sigma P_k y_k}{\Sigma P_k}, \quad \zeta = \frac{\Sigma P_k z_k}{\Sigma P_k}.$$

Опредѣленная такимъ образомъ точка C есть центръ параллельныхъ векторовъ $P_1, P_2, \dots, P_n$, связанныхъ съ ихъ точками приложенія; она называется центромъ параллельныхъ силъ. Перемищая главный векторъ P по центральной оси D , на которой онъ лежитъ, мы всегда можемъ достигнуть того, чтобы точкой его приложенія служила эта особенная точка C . Такъ мы и будемъ всегда предполагать, если только не сдѣлаемъ оговорки о противномъ.

Итакъ, параллельныя силы, геометрическая сумма которыхъ не равна нулю и которыя приложены къ твердому тѣлу, имѣютъ лишь результирующую силу, которая геометрически равна этой суммѣ и которую мы можемъ считать приложенной къ центру параллельныхъ силъ.

2° Если $P = \Sigma P_k = 0$ и $OG \neq 0$, то силы приводятся къ парѣ; тѣ изъ силъ, которыя тянутъ тѣло въ одну сторону, имѣютъ равнодѣйствующую P' , приложенную къ центру C' этихъ силъ, а тѣ силы, которыя тянутъ въ противоположную сторону, имѣютъ равную и противоположную равнодѣйствующую $P'' = -P'$, приложенную къ ихъ центру C'' ; такимъ образомъ получается пара силъ.

3° Равновѣсіе. — Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $P = 0$, $OG = 0$. Двѣ силы P' и P'' , полученныя въ предыдущемъ случаѣ, будутъ равны и прямопротивоположны. Шесть аналитическихъ условій равновѣсія приводятся къ тремъ слѣдующимъ.

Условія равновѣсія:

$$\Sigma P_k = 0, \quad \frac{\Sigma P_k x_k}{a} = \frac{\Sigma P_k y_k}{\beta} = \frac{\Sigma P_k z_k}{\gamma}.$$

На практикѣ мы всегда можемъ направить ось Oz параллельно общему направленію силъ. Три условія равновѣсія принимаютъ тогда слѣдующій видъ:

$$\Sigma P_k = 0, \quad \Sigma P_k x_k = 0, \quad \Sigma P_k y_k = 0, \quad (3)$$

эти условія мы могли бы получить непосредственно, замѣчая, что количества X и Y сами по себѣ равны нулю, такъ какъ проекціи силъ на оси Ox и Oy равны нулю, и что вслѣдствіе параллельно-

сти всѣхъ силъ оси Oz ихъ моменты $N_1, N_2, \dots, N_n$ около оси Oz равны нулю, такъ что количество N само есть нуль. Остается, слѣдовательно, выразить, что сумма проекцій силъ на ось Oz равна нулю, и что сумма моментовъ силъ около каждой изъ осей Ox и Oy равна нулю, что и дастъ намъ три условія (3).

Астатическое равновѣсіе. — Предположимъ, что при перемѣщеніи тѣла параллельныя силы сохраняютъ неизмѣнную величину и направленіе и остаются приложенными къ неподвижнымъ точкамъ тѣла; равновѣсіе называется астатическимъ, если оно имѣетъ мѣсто при всякой оріентировкѣ тѣла или, что сводится къ тому же, при всякой оріентировкѣ силъ по отношенію къ тѣлу, т. е. при всякихъ значеніяхъ косинусовъ α, β, γ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\Sigma P_k = 0, \quad \Sigma P_k x_k = 0, \quad \Sigma P_k y_k = 0, \quad \Sigma P_k z_k = 0.$$

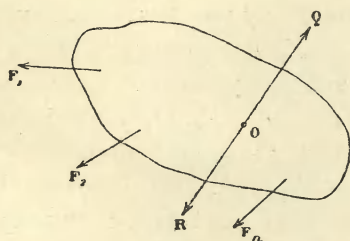
Въ этомъ случаѣ центръ параллельныхъ силъ, которыя тянутъ тѣло въ одну сторону, совпадаетъ съ центромъ тѣхъ силъ, которыя тянутъ въ противоположную сторону, такъ что эти двѣ системы силъ всегда находятся въ равновѣсіи.

VI. — ТВЕРДЫЯ ТѢЛА, ПОДЧИНЕННЫЯ СВЯЗЯМЪ.

111. Методъ. — Общій методъ, которымъ мы будемъ пользоваться, состоитъ въ томъ, что мы будемъ разсматривать тѣла, какъ свободныя, вводя въ качествѣ вспомогательныхъ неизвѣстныхъ реакціи, вызываемыя связями, которымъ подчинены тѣла; эти реакціи называются силами связи.

112. Тѣло, имѣющее одну неподвижную точку. — Вообразимъ твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку O , вокругъ которой оно можетъ свободно вращаться. Обозначимъ черезъ $F_1, F_2, \dots, F_n$ силы, дѣйствующія на это твердое тѣло. Такое твердое тѣло мы можемъ называть рычагомъ въ самомъ общемъ смыслѣ этого слова. Итакъ, разыщемъ условія равновѣсія рычага.

Разсматриваемое твердое тѣло производить на неподвижную точку давленіе R (фиг. 88); въ силу принципа равенства дѣйствія и противодѣйствія неподвижная точка дѣйствуетъ на тѣло, и это



Фиг. 88.

дѣйствіе выражается реакціей Q , равной и прямопротивоположной давленію R , такъ что мы можемъ разсматривать тѣло, какъ свободное и находящееся подъ дѣйствіемъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n, Q$. Если тѣло находится въ равновѣсіи, то это значить, что первыя n силъ приводятся къ одной результирующей, которая равна и прямопротивоположна реакціи Q ; условіе равновѣсія состоитъ, слѣдовательно, въ томъ, чтобы данныя силы имѣли только результирующую, проходящую черезъ неподвижную точку. Это условіе достаточно, такъ какъ при замѣнѣ приложенныхъ къ тѣлу силъ этой результирующей, послѣдняя уничтожается сопротивленіемъ неподвижной точки, развивающей равную и прямопротивоположную реакцію.

Къ этимъ же результатамъ мы можемъ придти аналитическимъ путемъ; возьмемъ прямоугольныя оси, проходящія черезъ неподвижную точку O ; обозначимъ черезъ X, Y, Z, L, M, N проекціи результирующей силы и результирующаго момента около начала силъ F , приложенныхъ къ твердому тѣлу, и черезъ X', Y', Z' проекціи реакціи Q неподвижной точки. Условія равновѣсія выражаются слѣдующими уравненіями:

$$X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad Z + Z' = 0, \quad (1)$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \quad (2)$$

Уравненія (2), не содержащія реакціи, представляютъ собою необходимыя условія равновѣсія; они выражаютъ еще, что силы F , приложенныя къ тѣлу, приводятся къ одной силѣ, проходящей черезъ

начало. Уравнения (1) показываютъ далѣе, что реакція (X' , Y' , Z') равна и противоположна этой результирующей (X , Y , Z), которая есть, слѣдовательно, не что иное, какъ давленіе на неподвижную точку.

Возьмемъ частный случай рычага, на который дѣйствуютъ только двѣ силы F_1 и F_2 . Для равновѣсія такого рычага необходимо и достаточно, чтобы эти силы уравновѣшивались реакціей Q точки O . Для того, чтобы три силы F_1 , F_2 , Q уравновѣшивались, необходимо, чтобы силы F_1 , F_2 были въ одной плоскости съ точкой O и чтобы сумма моментовъ силъ F_1 и F_2 около точки O была равна нулю; это есть не что иное, какъ извѣстное элементарное условіе равновѣсія рычага.

113. Твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось. — Разсмотримъ твердое тѣло, которое должно вращаться безъ тренія вокругъ неподвижной оси Oz и находится подъ дѣйствіемъ силъ F_1 , F_2 , ..., F_n . Теоретически мы можемъ представить себѣ, что тѣло должно вращаться вокругъ этой оси вслѣдствіе того, что нѣкоторыя точки тѣла, лежація на оси, должны оставаться въ покоѣ. При этомъ тѣло будетъ производить на эти точки давленія, и, обратно, эти точки развиваютъ реакціи R' , R'' , R''' , ..., которыя исходятъ отъ оси и дѣйствуютъ на тѣло. На практикѣ тѣло вращается либо вокругъ горизонтальной оси на связанныхъ съ тѣломъ цапфахъ, расположенныхъ въ неподвижныхъ подшипникахъ, либо же вокругъ вертикальной оси на пятѣ, вращающейся въ гнѣздѣ. Во всѣхъ этихъ случаяхъ при отсутствіи тренія реакціи неподвижныхъ точекъ опоры приводятся къ силамъ R' , R'' , R''' , ..., пересѣкающимъ ось вращенія Oz .

Мы можемъ разсматривать тѣло, какъ свободное, но находящееся подъ дѣйствіемъ силъ F_1 , F_2 , ..., F_n , R' , R'' , Для равновѣсія необходимо въ частности, чтобы сумма моментовъ всѣхъ этихъ силъ около неподвижной оси была равна нулю. Такъ какъ моменты реакцій R' , R'' , ... равны нулю, то необходимо, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$N = 0.$$

Это есть необходимое условіе равновѣсія. Оно также достаточно; дѣйствительно, если оно удовлетворяется, то силы приводятся къ общей

равнодѣйствующей силѣ OR , которая уничтожается сопротивленіемъ оси, и къ парѣ, которой ось Og перпендикулярна къ оси Oz , такъ какъ проекція N равна нулю. Мы можемъ считать эту пару лежащей въ плоскости, проходящей черезъ ось вращенія, и можемъ такъ повернуть эту пару въ ея плоскости, чтобы плечо пары совпало съ осью; тогда силы φ, φ' , составляющія пару, будучи приложены къ точкамъ оси, уничтожаются ея сопротивленіемъ; тѣло будетъ находиться въ равновѣсіи.

Только что разсмотрѣнная нами задача даетъ условія равновѣсія ворота.

Реакція оси. — На практикѣ весьма важно вычислить реакціи оси на тѣло: зная ихъ, мы найдемъ давленія тѣла на ось, которыя равны и прямопротивоположны реакціямъ. Ось должна быть въ состояніи выдержать эти давленія, не ломаясь. Чтобы сдѣлать задачу болѣе опредѣленной, замѣтимъ, что реакціи $R', R'', R''', \dots$ оси, каково бы ни было ихъ число, могутъ быть приведены къ двумъ реакціямъ Q' и Q'' , приложеннымъ къ двумъ точкамъ O и O' , произвольно выбраннымъ на оси. Дѣйствительно, эти реакціи сначала могутъ быть приведены къ одной силѣ Φ , приложенной къ точкѣ O , и парѣ, ось которой OH перпендикулярна къ оси Oz ¹⁵⁾. Одну изъ силъ этой пары можно приложить къ точкѣ O и сложить съ силой Φ , что даетъ силу Q' ; другую силу пары мы приложимъ къ произвольной точкѣ O' на оси Oz и такимъ образомъ будемъ имѣть силу Q'' . Физически этотъ результатъ можно представить себѣ слѣдующимъ образомъ.

Мы всегда можемъ допустить, что неподвижность оси достигнута закрѣпленіемъ двухъ ея точекъ O и O' . Эти точки будутъ оказывать на твердое тѣло реакціи Q' и Q'' . Возьмемъ начало въ точкѣ O ; обозначимъ черезъ X, Y, Z, L, M, N тѣ же элементы, что и прежде, и черезъ $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ проекціи реакцій Q' и Q'' . Пусть h будетъ разстояніе OO' . Мы будемъ имѣть слѣдующія условія равновѣсія (фиг. 89):

$$\begin{aligned} X + X' + X'' &= 0, & Y + Y' + Y'' &= 0, & Z + Z' + Z'' &= 0; \\ L - hY'' &= 0, & M + hX'' &= 0, & N &= 0. \end{aligned}$$

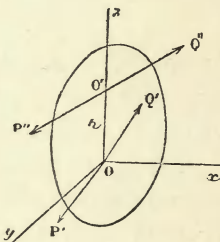
Послѣднее изъ этихъ уравненій не зависитъ отъ реакцій и выражаетъ необходимое и достаточное условіе равновѣсія. Два пре-

дыдущихъ уравненія даютъ значенія X'' и Y'' . Подставивъ ихъ въ два первыхъ уравненія, мы вычислимъ X' и Y' ; проекціи же Z' и Z'' связаны однимъ только условіемъ

$$Z + Z' + Z'' = 0,$$

и потому реакціи не могутъ быть вычислены полностью.

Однако, съ точки зрѣнія физики реакціи являются вполне опредѣленными, такъ какъ твердыя тѣла, которыя мы встрѣчаемъ въ



Фиг. 89.

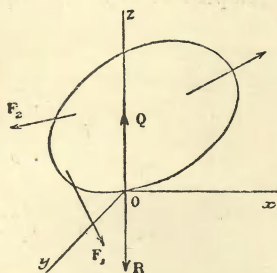
природѣ, не обладаютъ свойствами, которыя приписываются твердымъ тѣламъ въ теоретической механикѣ: тѣла деформируются, и ихъ деформация вызываетъ дѣйствіе упругихъ силъ; принимая эти силы въ расчетъ, мы можемъ вполне опредѣлить реакціи.

114. Тѣло, вращающееся вокругъ оси и перемѣщающееся вдоль оси безъ тренія. — Въ этомъ случаѣ реакціи Q' , Q'' , Q''' , ... оси на тѣло нормальны къ оси; принявъ послѣднюю за ось Oz , мы получимъ два условія равновѣсія

$$N = 0, \quad Z = 0.$$

115. Тѣло, опирающееся на неподвижную плоскость безъ тренія. — 1° Случай одной точки опоры. — Разсмотримъ сначала случай, когда тѣло опирается на плоскость только одной точкой; плоскость оказываетъ на тѣло нормальную реакцію, если предположить, что тѣло можетъ скользить безъ тренія. Мы можемъ разсматривать тѣло, какъ свободное, но подверженное дѣйствію силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$, которыя непосредственно приложены къ и, нему указанной реакціи Q . Для того, чтобы тѣло было въ равновѣсіи,

необходимо, чтобы силы F имѣли только равнодѣйствующую, равную и прямопротивоположную реакціи Q (фиг. 90), т. е., чтобы данныя силы имѣли равнодѣйствующую, которая проходила бы че-



Фиг. 90.

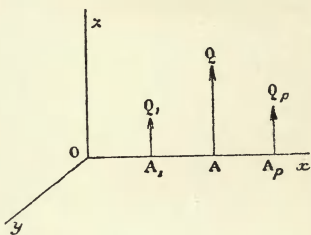
резъ точку опоры, была нормальна къ плоскости и направлена такъ, чтобы тѣло ею прижималось къ плоскости. Эти условія, очевидно, достаточны: если они выполнены, то равнодѣйствующая не можетъ вызывать никакого скольженія и уничтожается неподвижностью плоскости, которая развиваетъ равную и противоположную ей реакцію Q . Эти результаты легко также найти аналитически.

2° Случай нѣсколькихъ точекъ опоры, расположенныхъ на одной прямой. — Допустимъ, что тѣло опирается на неподвижную плоскость въ точкахъ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$ прямой Ox . Во всѣхъ этихъ точкахъ плоскость оказываетъ нормальныя реакціи $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$, которыя всѣ направлены въ одну сторону (фиг. 91). Эти силы имѣютъ равнодѣйствующую Q , нормальную къ плоскости и направленную въ ту же сторону; точка приложенія равнодѣйствующей лежитъ на прямой Ox между крайними точками A_1, A_p .

Для существованія равновѣсія необходимо, чтобы данныя силы уравнивались реакціями плоскости, т. е. чтобы онѣ имѣли только нормальную къ плоскости равнодѣйствующую, которая прижимала бы тѣло къ плоскости, и продолженіе которой встрѣчало бы прямую Ox въ точкѣ, лежащей между точками A_1 и A_p . Эти необходимыя условія оказываются также достаточными, потому что при та-

кихъ условіяхъ эта равнодѣйствующая можетъ быть разложена на двѣ другія, нормальныя къ плоскости и приложенныя къ двумъ точкамъ опоры; эти силы будутъ уничтожаться сопротивленіемъ плоскости.

Чтобы выразить эти условія аналитически, мы примемъ за ось x прямую Ox и направимъ ось z нормально къ плоскости



Фиг. 91.

и въ ту сторону отъ нея, гдѣ находится тѣло. Тогда всѣ реакціи $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$ будутъ положительными. Условія равновѣсія выражаются равенствами

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z+Q_1+Q_2+\dots+Q_p=0;$$

$$L=0, \quad M-a_1Q_1-a_2Q_2-\dots-a_pQ_p=0, \quad N=0,$$

гдѣ $a_1, a_2, \dots, a_p$ обозначаютъ абсциссы точекъ опоры.

Изъ этихъ уравненій четыре, не зависящія отъ реакцій, выражаютъ необходимыя условія равновѣсія; они показываютъ, что данныя силы должны имѣть только равнодѣйствующую, нормальную къ плоскости xy и встрѣчающую ось z -овъ. Третье уравненіе показываетъ намъ, что проекція Z должна быть отрицательной, т. е. что равнодѣйствующая должна быть направлена такимъ образомъ, чтобы прижимать тѣло къ плоскости. Пусть x будетъ абсцисса точки, въ которой равнодѣйствующая пересѣкаетъ ось Ox . Моментъ ея около оси Oy будетъ $M=-xZ$; мы должны, слѣдовательно, имѣть уравненіе

$$xZ+a_1Q_1+a_2Q_2+\dots+a_pQ_p=0,$$

откуда, подставляя вмѣсто Z его значеніе, мы найдемъ:

$$x = \frac{a_1Q_1+a_2Q_2+\dots+a_pQ_p}{Q_1+Q_2+\dots+Q_p};$$

это количество, какъ извѣстно, заключается между двумя крайними значеніями a_1 и a_p , потому что количества $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$ имѣютъ положительныя значенія; продолженіе равнодѣйствующей пересѣкается, слѣдовательно, ось Ox между крайними точками опоры.

Реакціи плоскости должны теперь удовлетворять двумъ уравненіямъ:

$$Z + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_p = 0,$$

$$M - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \dots - a_p Q_p = 0.$$

Если существуютъ только двѣ точки опоры, то эти уравненія дадутъ намъ значенія двухъ реакцій. Если же число точекъ опоры больше двухъ, то эти два соотношенія не опредѣляютъ реакцій. Для полнаго ихъ опредѣленія нужно ввести соображенія, относящіяся къ упругости.

3° Общій случай. — Предположимъ, что твердое тѣло опирается на неподвижную плоскость нѣсколькими точками $A_1, A_2, \dots, A_p$, не лежащими на одной прямой. Плоскость оказываетъ нормальныя реакціи $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$, имѣющія только равнодѣйствующую Q , потому что всѣ онѣ направлены въ одну сторону, и, согласно тому, что мы видѣли при сложеніи параллельныхъ силъ, точка, въ которой эта равнодѣйствующая встрѣчаетъ плоскость, лежитъ внутри всякаго выпуклаго многоугольника, заключающаго всѣ точки опоры; въ частности, она находится внутри опорнаго многоугольника, т. е. выпуклаго многоугольника, вершинами котораго служатъ точки опоры и который заключаетъ въ себѣ всѣ остальные точки опоры. Для существованія равновѣсія необходимо, чтобы данныя силы уравновѣшивались равнодѣйствующей Q ; необходимо, слѣдовательно, чтобы силы F имѣли только равнодѣйствующую, которая была бы нормальна къ плоскости, прижимала бы тѣло къ плоскости и проходила бы черезъ тѣло внутри опорнаго многоугольника. Эти условія достаточны, потому что при такихъ допущеніяхъ мы всегда можемъ разложить эту равнодѣйствующую на три силы, которыя будутъ приложены нормально къ плоскости въ трехъ какихъ-либо точкахъ опоры и которыя будутъ уничтожаться сопротивленіемъ плоскости.

Возьмемъ прежнюю систему осей; тѣло мы можемъ разсматривать, какъ свободное, но находящееся подъ дѣйствіемъ силъ

$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_p$, такъ что, обозначивъ черезъ $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ координаты точекъ опоры, мы будемъ имѣть слѣдующія условія равновѣсія:

$$X=0, \quad Y=0, \quad N=0; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} Z + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_p &= 0, \\ L + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + \dots + b_p Q_p &= 0, \\ M - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 - \dots - a_p Q_p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравненія (1), будучи независимы отъ реакцій, выражаютъ необходимое условіе равновѣсія, а именно: данныя силы должны имѣть только равнодѣйствующую, перпендикулярную къ плоскости; дѣйствительно, количество $LX + MY + NZ$ равно нулю, и мы можемъ имѣть $Z=0$ только въ томъ случаѣ, если всѣ реакціи будутъ нулями, потому что онѣ могутъ быть только либо положительными, либо нулями. Въ этомъ частномъ случаѣ, когда всѣ реакціи равны нулю, количества Z, L и M будутъ нулями, и непосредственно приложенныя силы взаимно уравновѣшиваются. Исключивъ этотъ очевидный случай равновѣсія, мы видимъ, что силы $F_1, \dots, F_n$ должны дать равнодѣйствующую, нормальную къ плоскости; кромѣ того, необходимо: 1° чтобы сила Z была отрицательной, что вытекаетъ изъ перваго изъ уравненій (2), и 2° чтобы единственно существующая равнодѣйствующая пересѣкала плоскость xy внутри опорнаго многоугольника, — условіе, которое можно вывести изъ двухъ послѣднихъ уравненій (2). Если существуютъ только три точки опоры, то уравненія (2) даютъ возможность опредѣлить три реакціи. Если число точекъ опоры превышаетъ три, то необходимо принять въ расчетъ упругость тѣлъ.

Относительно вопросовъ, связанныхъ съ опредѣленіемъ реакцій, см. замѣтку г. Louis Bossut (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3-я серія, т. XII, 1893).

116. Случай нѣсколькихъ твердыхъ тѣлъ. — Чтобы найти условія равновѣсія системы, состоящей изъ нѣсколькихъ твердыхъ тѣлъ, подчиненныхъ взаимнымъ связямъ, можно примѣнить слѣдующій методъ: выразимъ, что каждое изъ тѣлъ системы находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ, непосредственно приложенныхъ къ нему, и реакцій другихъ тѣлъ на него, при чемъ эти послѣднія

силы подчинены закону равенства дѣйствія и противодѣйствія. Мы не будемъ заниматься здѣсь приложеніемъ этого метода; ниже мы увидимъ, что принципъ возможныхъ скоростей даетъ методъ, съ помощью котораго вопросы этого рода рѣшаются гораздо быстрее.

VII. — ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ.

117. Центры тяжести. — Мы дали уже опредѣленіе вѣса матеріальной точки: это — вертикальная сила, напряженіе которой P равно массѣ матеріальной точки, умноженной на ускореніе g силы тяжести; это ускореніе въ одномъ и томъ же мѣстѣ одинаково для всѣхъ тѣлъ. Направленіе вертикальной линіи мѣняется отъ одного мѣста къ другому; наблюденіе показало, что значеніе g измѣняется съ широтой и долготой мѣста: но эти измѣненія нечувствительны на протяженіи тѣла обыкновенныхъ размѣровъ. Поэтому тяжелое твердое тѣло можетъ быть разсматриваемо, какъ совокупность большого числа матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собой и находящихся подъ дѣйствіемъ вертикальныхъ силъ, пропорціональныхъ ихъ массамъ. Равнодѣйствующая этихъ силъ, равная ихъ суммѣ, называется вѣсомъ тѣла. Точка приложенія этой равнодѣйствующей, или центръ параллельныхъ силъ, связанныхъ съ ихъ точками приложенія, носитъ особое названіе центра тяжести; онъ занимаетъ въ тѣлѣ положеніе, которое не зависитъ отъ ориентировки тѣла. Дѣйствительно, когда тѣло перемѣщается, то для наблюдателя, перемѣщающагося вмѣстѣ съ тѣломъ, все происходитъ такъ, какъ если бы тѣло оставалось неподвижнымъ, и параллельныя силы повернулись на одинъ и тотъ же уголъ около своихъ точекъ приложенія, что не измѣняетъ положенія центра параллельныхъ силъ. Итакъ, центръ тяжести есть та точка тѣла, черезъ которую постоянно проходитъ вѣсъ тѣла, какъ бы послѣднее ни было ориентировано. Поэтому, если мы закрѣпимъ неподвижно центръ тяжести и предоставимъ тѣлу свободу вращаться вокругъ этой точки, то тѣло, подверженное дѣйствію одной только силы тяжести, останется въ равновѣсіи во всѣхъ положеніяхъ, которое оно можетъ занять.

Замѣчаніе. — Предположимъ, что тяжелое тѣло поставлено въ опредѣленное положеніе; вѣсъ каждой матеріальной точки тѣла приложенъ къ этой точкѣ, и равнодѣйствующая P этихъ вѣсовъ приложена къ центру тяжести G . Если мы будемъ перемѣщать силы вѣса вдоль ихъ основаній, то точки приложенія силъ будутъ измѣняться; вмѣстѣ съ этимъ будетъ измѣняться и центръ параллельныхъ силъ, но онъ будетъ описывать вертикальную линію D точки G , потому что при этой операціи равнодѣйствующая P будетъ лишь перемѣщаться вдоль своего основанія. Если мы дадимъ тѣлу второе положеніе и повторимъ ту же операцію, то получимъ вторую прямую D' , проходящую черезъ точку G . Эта точка находится на пересѣченіи прямыхъ D и D' .

118. Выраженія координатъ центра тяжести. — Пусть $m_1, m_2, \dots, m_n$ будутъ массы и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — вѣса матеріальныхъ точекъ, составляющихъ твердое тѣло; $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ — координаты этихъ точекъ, P и M — вѣсъ и масса тѣла. Имѣемъ:

$$p_k = m_k g, \quad P = p_1 + p_2 + \dots + p_n = Mg.$$

Если мы обозначимъ черезъ (ξ, η, ζ) координаты центра тяжести, то по формуламъ для центра параллельныхъ силъ получимъ:

$$\xi = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

или, въ сокращенной формѣ:

$$\xi = \frac{\sum p x}{\sum p} = \frac{\sum m x}{\sum m}, \quad \eta = \frac{\sum p y}{\sum p} = \frac{\sum m y}{\sum m}, \quad \zeta = \frac{\sum p z}{\sum p} = \frac{\sum m z}{\sum m}.$$

Эти формулы показываютъ, что положеніе центра тяжести зависитъ единственно отъ массъ точекъ.

Это замѣчаніе имѣетъ важное значеніе, такъ какъ оно даетъ намъ возможность распространять понятіе о центрѣ тяжести на невѣсомыя системы. Даже въ нѣкоторыхъ вопросахъ, относящихся къ матеріальнымъ точкамъ, которыя имѣютъ массы $m_1, m_2, \dots, m_n$ и не связаны между собой неизмѣнно, полезно бываетъ ввести точку, координаты которой ξ, η, ζ опредѣляются предыдущими формулами; эта точка, которую Эйлеръ предложилъ называть центромъ

инерціи, все еще называется центромъ тяжести, хотя къ ней уже не примѣнимы тѣ соображенія, которыя приводятъ къ понятію о центрѣ тяжести. Центръ тяжести лежитъ, очевидно, внутри всякой выпуклой поверхности, окружающей разсматриваемыя точки (п. 23, замѣчаніе II).

Если извѣстны центры тяжести G_1 и G_2 двухъ частей тѣла и массы M_1 и M_2 этихъ частей, то отсюда можно непосредственно найти центръ тяжести тѣла, потому что онъ есть центръ параллельныхъ силъ M_1g и M_2g , приложенныхъ къ двумъ точкамъ G_1 и G_2 . Вообще, если $G_1, G_2, \dots, G_p$ суть центры тяжести нѣсколькихъ частей тѣла и $M_1, M_2, \dots, M_p$ суть массы этихъ частей, то центръ тяжести тѣла совпадаетъ съ центромъ параллельныхъ силъ $M_1g, M_2g, \dots, M_pg$, приложенныхъ къ точкамъ $G_1, G_2, \dots, G_p$. Обозначивъ черезъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_p, y_p, z_p$ координаты центровъ тяжести этихъ различныхъ частей, мы получимъ для координатъ ξ, η, ζ центра тяжести тѣла слѣдующія выраженія:

$$\xi = \frac{M_1x_1 + M_2x_2 + \dots + M_px_p}{M_1 + M_2 + \dots + M_p}, \quad \eta = \frac{\sum My}{\sum M}, \quad \zeta = \frac{\sum Mz}{\sum M}.$$

Когда мы желаемъ опредѣлить центръ тяжести твердаго тѣла данной формы, на примѣръ, нѣкоторой массы металла, то мы должны приложить предыдущія формулы къ тѣлу, состоящему изъ чрезвычайно большого числа матеріальныхъ точекъ, лежащихъ на чрезвычайно малыхъ разстояніяхъ одна отъ другой. Чтобы обойти эту трудность, мы разсматриваемъ тѣло, какъ сплошное; это не соотвѣтствуетъ дѣйствительности, но даетъ весьма удовлетворительное приближеніе въ приложеніяхъ. Читателя, который пожелалъ бы отдать себѣ болѣе подробный отчетъ въ законности подобной замѣны даннаго тѣла сплошнымъ, мы отсылаемъ къ главѣ VI „Механики“ Пуассона, гдѣ разсматривается притяженіе тѣлъ. Отождествивъ такимъ образомъ твердое тѣло со сплошнымъ объемомъ, мы предположимъ, что послѣдній раздѣленъ на безконечно большое число частицъ, безконечно малыхъ по всѣмъ направленіямъ, и центръ тяжести каждой изъ этихъ частицъ помѣстимъ въ произвольной точкѣ ея массы; формулы для координатъ центра тяжести тѣла, раздѣленнаго на части, имѣющія массы $M_1, M_2, \dots, M_p$, будутъ тогда содержать въ числитель и знаменатель не суммы, но тройные интегралы. Если толщина тѣла чрезвычайно мала сравнительно съ другими измѣре-

ніями его, то тѣло отождествляютъ съ поверхностью; примѣромъ можетъ служить очень тонкій листъ бумаги или металла. Точно такъ же въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно принимать тѣло за прямую линію; примѣромъ можетъ служить длинная и тонкая нить.

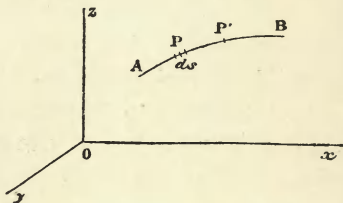
Замѣчаніе. — Предыдущія формулы примѣнимы какъ къ прямоугольнымъ, такъ и къ косоугольнымъ осямъ, потому что онѣ вытекаютъ изъ общей теоремы о моментахъ относительно плоскости. (п. 23).

119. Сплошныя тѣла. — Теперь мы покажемъ, какъ нахожденіе центра тяжести сплошнаго тѣла приводится къ вычисленію опредѣленныхъ интеграловъ.

Сначала сдѣлаемъ общее замѣчаніе, которое часто даетъ возможность сократить вычисления.

Если тѣло обладаетъ центромъ симметріи, то центръ тяжести находится въ этой точкѣ: дѣйствительно, два симметричныхъ элемента имѣютъ одинаковый вѣсъ, и эти два вѣса даютъ равновѣсствующую, приложенную къ центру симметріи. Если тѣло обладаетъ осью или плоскостью симметріи, то нетрудно также понять, что центръ тяжести лежитъ на оси или въ плоскости симметріи.

120. Центры тяжести линій. Общія формулы. — На линіи AB возьмемъ двѣ точки P и P' (фиг. 92) и обозначимъ черезъ m массу дуги PP' ; отношеніе $\frac{m}{\text{arc } PP'}$ есть средняя плотность дуги PP' . Если это отношеніе не зависитъ отъ положенія точекъ P и P' , то линія AB называется однородной. Если это отноше-



Фиг. 92.

ніе измѣняется, то плотностью линіи въ точкѣ P называютъ предѣлъ q средней плотности дуги PP' , когда точка P' стремится къ точ-

къ P . Плотность ϱ въ точкѣ P , измѣняющаяся въ зависимости отъ положенія точки, представляетъ собой функцію параметра, опредѣляющаго положеніе точки P на кривой. Пусть ds будетъ безконечно малый элементъ, имѣющій координаты x, y, z ¹⁶⁾, dm —его масса и ϱ его линейная плотность; имѣемъ:

$$\frac{dm}{ds} = \varrho, \quad dm = \varrho ds.$$

Полная масса тѣла M и координаты ξ, η, ζ центра тяжести G даются тогда слѣдующими формулами:

$$M = \int \varrho ds, \quad M\xi = \int x\varrho ds, \quad M\eta = \int y\varrho ds, \quad M\zeta = \int z\varrho ds. \quad (1)$$

Когда мы имѣемъ дѣло съ однородной линіей, то плотность ϱ есть постоянная величина, и масса M равна тогда ϱl , гдѣ l обозначаетъ длину кривой; въ такомъ случаѣ

$$l = \int ds, \quad l\xi = \int x ds, \quad l\eta = \int y ds, \quad l\zeta = \int z ds, \quad (2)$$

при чемъ интегрированіе распространяется на дугу рассматриваемой кривой. На практикѣ координаты x, y, z точки кривой выражаются черезъ нѣкоторый параметръ q :

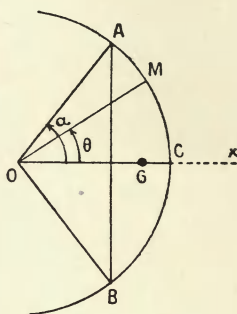
$$x = f(q), \quad y = \varphi(q), \quad z = \psi(q), \\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dq,$$

и всѣ интегралы получаютъ видъ $\int_a^b F(q) dq$, гдѣ a и b обозначаютъ предѣлы, между которыми измѣняется параметръ q , когда точка (x, y, z) описываетъ рассматриваемую дугу.

Примѣры. — 1° Однородная прямая. — Такъ какъ середина прямой служитъ ея центромъ симметріи, то центръ тяжести совпадаетъ съ этой точкой.

2° Дуга однородной окружности. — Пусть AB будетъ дуга однородной окружности (фиг. 93), O — центръ и R — радіусъ окружности. Центръ тяжести G лежитъ на радіусѣ OC , который

перпендикуляренъ къ хордѣ AB и служить осью симметріи; точка G опредѣляется разстояніемъ ея ξ отъ центра. Формулы (2) даютъ



Фиг. 93.

намъ равенство $l\xi = \int x ds$. Обозначивъ черезъ θ уголь COM и черезъ α уголь COA , мы получимъ:

$$x = R \cos \theta, \quad s = R \theta, \quad ds = R d\theta,$$

$$l\xi = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R^2 \cos \theta d\theta = 2R^2 \sin \alpha.$$

Но $AB = 2R \sin \alpha$, и мы можемъ написать предыдущій результатъ въ видѣ пропорціи

$$\frac{l}{AB} = \frac{R}{\xi}.$$

Итакъ, разстояніе центра тяжести отъ центра окружности есть четвертая пропорціональная къ длинѣ дуги, хордѣ и радіусу.

Теорема Гюльдена (Guldin).— Поверхность, описываемая плоской однородной кривой, которая вращается вокругъ оси, лежащей въ плоскости кривой и не пересѣкающей ея, равна длинѣ кривой, умноженной на длину окружности, описываемой центромъ тяжести кривой.

Дѣйствительно, возьмемъ за ось x -овъ ось вращенія, а за ось y -овъ — прямую, перпендикулярную къ первой оси. Элементъ ds ,

имѣющей ординату y , образуетъ при своемъ вращеніи элементъ поверхности dA , который мы можемъ принять за боковую поверхность усѣченного конуса:

$$dA = 2\pi y ds;$$

мы имѣемъ, слѣдовательно, формулу

$$A = 2\pi \int y ds = 2\pi \eta l,$$

которая и доказываетъ нашу теорему.

Если бы. ось пересѣкала кривую, то выраженіе, найденное для A , представляло бы не всю поверхность, но разность поверхностей, описанныхъ частями кривой, лежащими по ту и другую сторону оси: дѣйствительно, въ интегралѣ A элементъ $y ds$ будетъ положительнымъ или отрицательнымъ въ зависимости отъ того, находится ли элементъ ds надъ осью или подъ нею.

121. Центръ тяжести поверхностей. Общія формулы. —

Пусть m будетъ масса элемента поверхности, имѣющаго площадь σ ; отношение $\frac{m}{\sigma}$ есть средняя плотность элемента σ . Плотностью ρ поверхности въ точкѣ P называется предѣлъ отношенія $\frac{m}{\sigma}$, гдѣ σ есть бесконечно малый элементъ поверхности, окружающій точку P . Въ общемъ случаѣ плотность ρ есть функція отъ двухъ параметровъ, опредѣляющихъ положеніе точки P на поверхности. Когда плотность ρ имѣетъ постоянную величину, поверхность называется однородной.

Пусть $d\sigma$ будетъ бесконечно малый элементъ поверхности, окружающій точку P , координаты которой суть x, y, z ; масса dm этого элемента равна $\rho d\sigma$; обозначая черезъ M полную массу и черезъ ξ, η, ζ координаты центра тяжести, мы будемъ имѣть:

$$M = \iint \rho d\sigma, \quad M\xi = \iint x\rho d\sigma, \quad (1)$$

$$M\eta = \iint y\rho d\sigma, \quad M\zeta = \iint z\rho d\sigma.$$

Въ случаѣ однородной поверхности, ϱ есть постоянная величина, масса M равна ϱS , гдѣ S обозначаетъ площадь поверхности, и

$$S = \iint d\sigma, \quad S_{\xi} = \iint x \, dz. \quad (2)$$

$$S_{\eta} = \iint y \, d\sigma \quad S_{\zeta} = \iint z \, d\sigma.$$

Прямоугольныя декартовы координаты. — Предположимъ, что поверхность задана уравненіемъ въ прямоугольныхъ декартовыхъ координатахъ. Пусть p , q будутъ частныя производныя координаты z по x и y , а α , β , γ — направляющіе косинусы нормали къ поверхности, при чемъ эта нормаль считается обращенной въ ту сторону, гдѣ она составляетъ острый уголъ съ осью Oz . Мы имѣемъ:

$$dx \, dy = \gamma \, d\sigma, \quad \frac{\alpha}{-p} = \frac{\beta}{-q} = \frac{\gamma}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

откуда

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy.$$

Формулы (1) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} M &= \iint \varrho \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy, \\ M_{\xi} &= \iint \varrho x \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy, \\ M_{\eta} &= \iint \varrho y \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy, \\ M_{\zeta} &= \iint \varrho z \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

при чемъ предполагается, что ϱ , z , p , q представлены, какъ функции отъ x и y при помощи уравненія поверхности.

Въ случаѣ однородной поверхности, $M = \varrho S$ (S есть разсматриваемая площадь) и

$$\left. \begin{aligned} S &= \iint \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy, \\ S_{\xi} &= \iint x \sqrt{1+p^2+q^2} \, dx \, dy, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Примѣръ. Однородный сферическій сегментъ. — Возьмемъ начало координатъ въ центрѣ сферы. Уравненіе сферы есть $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, гдѣ R радіусъ. Найдемъ координату ζ . Имѣемъ :

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z}, \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{R^2}{z^2},$$

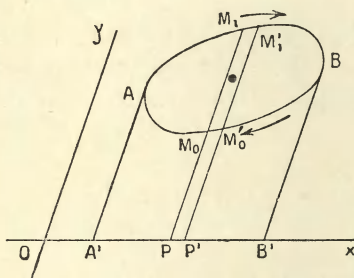
$$S\zeta = \iint R dx dy = RS',$$

гдѣ S' обозначаетъ проекцію поверхности S на плоскость xu . Полученный результатъ мы можемъ написать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{S}{S'} = \frac{R}{\zeta},$$

т. е. разстояніе центра тяжести отъ плоскости, проходящей черезъ центръ сферы, есть четвертая пропорціональная къ разсматриваемой поверхности, ея проекціи на плоскость и радіусу, потому что мы можемъ принять за плоскость xu любую плоскость, проходящую черезъ центръ.

Плоская площадь. — Примемъ плоскость поверхности за плоскость xu ; координата ζ будетъ тогда, очевидно, равна нулю.



Фиг. 94.

Элементъ $d\sigma$ имѣетъ различное выраженіе въ зависимости отъ выбора системы координатъ; напримѣръ, въ полярныхъ координатахъ r и θ мы должны дать элементу $d\sigma$ значеніе $r dr d\theta$; въ декартовыхъ координатахъ $d\sigma = dx dy \sin \alpha$, гдѣ α есть уголъ между осями.

Въ случаѣ однородной площади мы можемъ выполнить одно интегрирование и свести вычисленіе къ простымъ интеграламъ. Предположимъ, что площадь ограничена замкнутой кривой, и для упрощенія допустимъ, что эта кривая пересѣкается прямой, параллельной оси Oy , только въ двухъ точкахъ M_0 и M_1 . Пусть x будетъ абсцисса разсматриваемой параллельной прямой, а y_0, y_1 — ординаты PM_0 и PM_1 ; дадимъ абсциссѣ x безконечно малое приращеніе dx , которому соответствуетъ переходъ прямой PM_0M_1 въ $PM'_0M'_1$. Безконечно тонкую полосу $M_0M_1M'_0M'_1$ можно принять за параллелограммъ, имѣющій площадь $dS = (y_1 - y_0) dx \sin \alpha$; координаты его центра тяжести, находящагося въ центрѣ параллелограмма, равны

$$x \text{ и } \frac{y_1 + y_0}{2}.$$

Теперь

$$S = \int dS = \sin \alpha \int_a^b (y_1 - y_0) dx,$$

$$S\xi = \int x dS = \sin \alpha \int_a^b x(y_1 - y_0) dx \quad {}^{17)},$$

$$S\eta = \int \frac{y_1 + y_0}{2} dS = \frac{1}{2} \sin \alpha \int_a^b (y_1^2 - y_0^2) dx,$$

гдѣ предѣлами a и b служатъ абсциссы крайнихъ ординатъ $A'A$ и $B'B$. Мы можемъ нѣсколько упростить вычисленіе, введя криволинейные интегралы, взятые вдоль ограничивающей кривой. Написавъ

$$\int_a^b (y_1 - y_0) dx = \int_a^b y_1 dx + \int_a^b y_0 dx,$$

мы видимъ, что правая часть есть интегралъ $\int_C y dx$, взятый по контуру въ направленіи стрѣлки. Точно такъ же

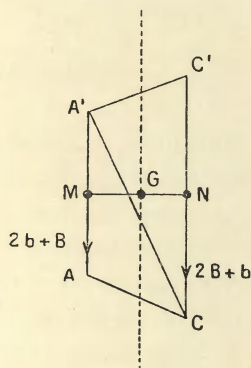
$$\begin{aligned} \int_a^b x(y_1 - y_0) dx &= \int_a^b xy_1 dx + \int_a^b xy_0 dx = \int_C xy dx, \\ \int_a^b (y_1^2 - y_0^2) dx &= \int_a^b y_1^2 dx + \int_b^a y_0^2 dx = \int_C y^2 dx, \end{aligned}$$

гдѣ индексъ C указываетъ, что интегралы взяты вдоль ограничивающей кривой. Мы получимъ, такимъ образомъ, формулы

$$S = \sin \alpha \int_C y \, dx, \quad S\xi = \sin \alpha \int_C xy \, dx, \quad S\eta = \frac{1}{2} \sin \alpha \int_C y^2 \, dx. \quad (5)$$

Само собой понятно, что, разбивъ поверхность на бесконечно тонкія полосы, параллельныя оси Ox , мы получимъ аналогичныя формулы, которыя выводятся изъ предыдущихъ путемъ замѣны x и ξ соответственно на y и η .

Въ этой послѣдней формѣ (5) формулы отличаются общностью и, какъ въ этомъ легко убѣдиться на чертежѣ, относятся ко всякой



Фиг. 95.

плоской фигурѣ, ограниченной кривою, которая вычерчивается однимъ почеркомъ и не имѣетъ двойныхъ точекъ.

Замѣчаніе. — Если однородная плоская фигура имѣетъ діаметръ, то центръ тяжести лежитъ на этомъ діаметрѣ. Предположимъ, что (фиг. 94) при всякомъ значеніи x середина прямой M_0M_1 лежитъ на оси Ox . Тогда прямая Ox называется діаметромъ, сопряженнымъ съ хордами, параллельными оси Oy . Въ этомъ случаѣ $y_1 + y_0 = 0$ при всякомъ значеніи x , и $\eta = 0$.

Примѣры. — 1° Треугольникъ. — Центръ тяжести площади однороднаго треугольника находится въ точкѣ пере-

сѣченія его медіанъ, потому что каждая медіана есть диаметръ, сопряженный съ хордами, параллельными соотвѣтственной сторонѣ. Отсюда можно вывести, что вѣсъ P всего треугольника есть равнодѣйствующая трехъ вѣсовъ, приложенныхъ въ трехъ вершинахъ треугольника, при чемъ каждый равенъ $\frac{P}{3}$.

2° Трапеція. — Возьмемъ трапецію $AA'C'C$, имѣющую основанія $AA' = b$ и $CC' = B$. Прямая MN , соединяющая середины двухъ основаній, есть диаметръ хордъ, параллельныхъ основаніямъ; на ней лежитъ, слѣдовательно, центръ тяжести G . Остается найти еще одну прямую, содержащую точку G . Для этой цѣли помѣстимъ основанія вертикально. Вѣсъ p треугольника $AA'C$ можетъ быть замѣненъ тремя вѣсами $\frac{p}{3}$, приложенными къ вершинамъ A, A', C , а вѣсъ P треугольника $A'C'C$ — тремя вѣсами $\frac{P}{3}$, приложенными къ вершинамъ A', C', C . Центръ этихъ шести параллельныхъ силъ и есть искомый центръ тяжести G ; если перемѣщать произвольнымъ образомъ эти шесть силъ вдоль ихъ основаній, то центръ этихъ параллельныхъ силъ также перемѣщается, но остается на вертикальной прямой, проходящей черезъ точку G (п. 117). Основываясь на этомъ, перемѣстимъ такъ три силы, направленные вдоль $A'A$, чтобы онѣ оказались приложенными къ точкѣ M , гдѣ онѣ даютъ равнодѣйствующую $\frac{2p+P}{3}$, а три другія силы приведемъ такимъ же образомъ къ точкѣ N , гдѣ онѣ даютъ равнодѣйствующую $\frac{2P+p}{3}$. Центръ этихъ силъ находится на вертикали, проведенной черезъ точку G ; такъ какъ онъ лежитъ, очевидно, на прямой MN , то онъ находится въ точкѣ G , и мы имѣемъ

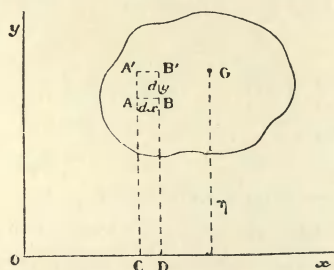
$$\frac{GM}{GN} = \frac{2P+p}{2p+P} = \frac{2B+b}{2b+B},$$

такъ какъ вѣса P и p треугольниковъ $AA'C$ и $A'C'C$, которые имѣютъ общую высоту, равную высотѣ трапеціи, пропорціональны основаніямъ B и b .

ТЕОРЕМА ГЮЛЬДЕНА. — Объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ однородной площади, ограниченной плоской кривой, вокругъ оси, которая лежитъ въ плоскости кривой и не

пересѣкаетъ ея, равенъ произведенію данной площади на длину окружности, описываемой центромъ тяжести этой площади.

Элементъ $dx dy$ площади S при своемъ вращеніи вокругъ оси Ox образуетъ элементъ объема, равный разности объемовъ



Фиг. 96.

цилиндровъ, образуемыхъ вращеніемъ прямоугольниковъ $A'B'CD$ и $ABCD$ (фиг. 96); этотъ элементъ объема, съ точностью до безконечно малыхъ третьяго порядка, равенъ

$$2\pi y dx dy;$$

сѣдовательно, объемъ V опредѣляется равенствомъ

$$V = 2\pi \iint y dx dy = 2\pi \eta S,$$

что и требовалось доказать.

Замѣтимъ, что въ случаѣ, когда ось пересѣкаетъ кривую, предыдущая формула выражала бы разность объемовъ, образуемыхъ частями площади, лежащими по одну и другую стороны оси Ox .

122. Центры тяжести объемовъ. Общія формулы. — Выдѣлимъ въ твердомъ тѣлѣ объемъ v , содержащій массу m ; отношеніе $\frac{m}{v}$ называется средней плотностью этого объема. Когда объемъ v стремится къ нулю и стягивается въ точку P ; отношеніе $\frac{m}{v}$, какъ мы предполагаемъ, стремится къ нѣкоторому предѣлу ρ , который называется плотностью въ точкѣ P . Это количество ρ есть функція отъ координатъ точки P ; если ρ есть постоянная, то тѣло называется однороднымъ.

Масса dm элемента объема dv вокруг точки $P(x, y, z)$ равна ρdv . Обозначивъ черезъ M полную массу, мы имѣемъ, слѣдовательно :

$$\left. \begin{aligned} M &= \iiint \rho \, dv, & M\xi &= \iiint x\rho \, dv, \\ M\eta &= \iiint y\rho \, dv, & M\zeta &= \iiint z\rho \, dv, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Въ случаѣ однороднаго тѣла, имѣющаго объемъ V , масса M равна ρV , и

$$\left. \begin{aligned} V &= \iiint dv, & V\xi &= \iiint x \, dv, \\ V\eta &= \iiint y \, dv, & V\zeta &= \iiint z \, dv \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Выраженіе элемента объема dv зависитъ отъ выбора системы координатъ: въ косоугольныхъ декартовыхъ координатахъ $dv = k \, dx \, dy \, dz$, гдѣ k обозначаетъ объемъ параллелепипеда, ребра котораго, параллельныя осямъ, имѣютъ длину, равную единицѣ; въ сферическихъ координатахъ r, θ, φ элементъ dv равенъ $r^2 \, dr \, \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ и т. д.

Однородное тѣло; приведеніе задачи къ двойнымъ интеграламъ. — Разсмотримъ однородный объемъ. Мы всегда можемъ предположить, что онъ ограниченъ цилиндромъ, образующія котораго параллельны оси Oz , и двумя поверхностями, каждая изъ которыхъ пересѣкается произвольной прямой, параллельной оси Oz , только въ одной точкѣ¹⁸⁾.

Черезъ точку M объема проведемъ прямую, параллельную оси Oz , и пусть z_0, z_1 будутъ координаты двухъ точекъ пересѣченія этой прямой съ двумя ограничивающими тѣло поверхностями; координаты z_0, z_1 суть функціи координатъ x, y точки M . Формулы (2) принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left. \begin{aligned} V &= k \iiint dx \, dy \, dz = k \iint dx \, dy \int_{z_0}^{z_1} dz = k \iint (z_1 - z_0) \, dx \, dy, \\ V\xi &= k \iiint x \, dx \, dy \, dz = k \iint x \, dx \, dy \int_{z_0}^{z_1} dz = k \iint x (z_1 - z_0) \, dx \, dy, \\ V\eta &= k \iiint y \, dx \, dy \, dz = k \iint y \, dx \, dy \int_{z_0}^{z_1} dz = k \iint y (z_1 - z_0) \, dx \, dy, \\ V\zeta &= k \iiint z \, dx \, dy \, dz = k \iint dx \, dy \int_{z_0}^{z_1} z \, dz = \frac{1}{2} k \iint (z_1^2 - z_0^2) \, dx \, dy. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Мы пришли такимъ образомъ къ двойнымъ интеграламъ, которые можно было бы получить геометрически, разбивая объемъ на призматическіе столбики, параллельные оси Oz и имѣющіе основанія $dx dy$.

Пользуясь формулой Грина, которую мы выведемъ позже, можно преобразовать эти интегралы (3) въ интегралы, взятые по поверхности, ограничивающей объемъ, и такимъ путемъ получить формулы, аналогичныя формуламъ (5) на стр. 197.

Замѣчаніе.— Если тѣло обладаетъ діаметральной плоскостью, то центръ тяжести лежитъ въ этой плоскости.— Предположимъ, что каждая прямая, параллельная оси Oz , пересѣкаетъ ограничивающія тѣло поверхности въ двухъ точкахъ, середина которыхъ лежитъ на плоскости xu ; послѣдняя называется тогда діаметральной плоскостью, сопряженной съ хордами, [параллельными оси Oz . Въ этомъ случаѣ $z_1 + z_0 = 0$ при всякихъ значеніяхъ x и y , и $\xi = 0$.

Часто встрѣчающійся случай, когда вычисленіе приводится къ простымъ квадратурамъ.— Центръ тяжести однороднаго объема, ограниченнаго двумя плоскостями, параллельными плоскости xu , и произвольной поверхностью, получается съ помощью квадратуръ, если мы умѣемъ выразить въ функціи отъ z площадь S произвольнаго сѣченія, параллельнаго плоскости xu , и координаты ξ_1 и η_1 центра тяжести этого сѣченія. Разобьемъ объемъ на бесконечно тонкіе слои посредствомъ плоскостей, параллельныхъ плоскости xu и отстоящихъ одна отъ другой на одинаковое [разстояніе, равное dz . Каждый такой слой, заключенный между плоскостями съ координатами z и $z + dz$, можно принять за цилиндръ, имѣющій основаніе S и высоту $dz \sin \alpha$; объемъ его $dV = \sin \alpha S dz$, гдѣ α есть уголъ, образуемый осью Oz съ плоскостью xOy ; центръ тяжести этого слоя имѣетъ координаты ξ_1, η_1, z . Пользуясь теоремой о моментахъ, мы найдемъ, что

$$\left\{ \begin{aligned} V &= \sin \alpha \int_a^b S dz, & V\xi &= \sin \alpha \int_a^b S\xi_1 dz, \\ V\eta &= \sin \alpha \int_a^b S\eta_1 dz, & V\xi &= \sin \alpha \int_a^b S\xi_1 dz; \end{aligned} \right. \quad (4)$$

a и b обозначаютъ координаты плоскостей, ограничивающихъ объемъ.

Подставляя вмѣсто объема V его выраженіе черезъ ξ , η , ζ , мы видимъ, что множитель $\sin \alpha$ исчезаетъ.

Слѣдствія. — I. Если центры тяжести ряда параллельныхъ сѣченій однороднаго тѣла лежатъ въ одной плоскости, то и центръ тяжести тѣла находится въ этой плоскости. — Дѣйствительно, если примемъ эту плоскость за плоскость yz , то будемъ имѣть всегда $\xi_1 = 0$, и формулы (4) дадутъ намъ въ этомъ случаѣ $\xi = 0$.

II. Если центры тяжести ряда параллельныхъ сѣченій лежатъ на прямой линіи, то и центръ тяжести тѣла находится на этой прямой. — Дѣйствительно, если, напримѣръ, $\xi_1 = \eta_1 = 0$ при всѣхъ значеніяхъ z , то предыдущія формулы даютъ намъ $\xi = \eta = 0$.

Примѣры. — 1° Однородная пирамида или однородный конусъ. — Центры тяжести сѣченій, параллельныхъ основанію, лежатъ на прямой Og , имѣющей длину l и соединяющей вершину съ центромъ тяжести g основанія; предполагая, что вершина O находится въ началѣ, что основаніе параллельно плоскости xOy и что ось z направлена по прямой Og , мы имѣемъ $S = kz^2$, откуда

$$\zeta \int_0^l kz^2 dz = \int_0^l kz^3 dz, \quad \zeta = \frac{3l}{4},$$

т. е. центръ тяжести находится на разстояніи $\frac{3}{4}$ длины Og отъ вершины.

2° Однородный полушаръ. — Предположимъ, что центръ полушара совпадаетъ съ началомъ, основаніе полушара лежитъ въ плоскости xOy и радіусъ равенъ R ; очевидно, что центръ тяжести лежитъ на радіусѣ Oz , перпендикулярномъ къ основанію. Найдемъ координату ζ центра тяжести. Въ настоящемъ случаѣ площадь S горизонтальнаго сѣченія равна $\pi(R^2 - z^2)$. Мы имѣемъ, слѣдовательно:

$$V\zeta = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)z dz = \frac{\pi R^4}{4},$$

такъ какъ $V = \frac{2}{3} \pi R^3$, то $\zeta = \frac{3R}{8}$.

ГЛАВА VI.

ДЕФОРМИРУЮЩІЯСЯ СИСТЕМЫ.

123. Методъ. — Во главѣ IV мы указали въ слѣдующей формѣ необходимыя условія равновѣсія произвольной матеріальной системы:

Когда деформирующаяся система находится въ равновѣсіи, приложенныя къ ней внѣшнія силы (т. е. силы, отличныя отъ взаимныхъ реакцій различныхъ частей), образуютъ систему приложенныхъ векторовъ, эквивалентную нулю, т. е. удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

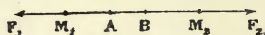
То же самое условіе должно выполняться внѣшними силами, приложенными къ каждой части матеріальной системы, когда эта часть разсматривается, какъ изолированная отъ остальной части.

Вышеуказанное условіе можно объяснить также путемъ слѣдующаго разсужденія, основаннаго на представленіи о затвердѣваніи: равновѣсіе системы, очевидно, не нарушится, если связать неизмѣняемымъ образомъ матеріальныя точки (системы) другъ съ другомъ, т. е. если вызвать отвердѣніе системы. Внѣшнія силы должны уравниваться въ полученномъ такимъ образомъ твердомъ тѣлѣ; онѣ удовлетворяютъ, слѣдовательно, шести общимъ уравненіямъ равновѣсія твердаго тѣла. Эти условія необходимы, но, вообще говоря, недостаточны.

І. — НИТЕВОЙ МНОГОУГОЛЬНИКЪ.

124. Опреѣленіе. — Нитевымъ многоугольникомъ называется система матеріальныхъ точекъ $M_1, M_2, \dots, M_n$, каждая изъ которыхъ связана съ послѣдующей посредствомъ гибкой и нерастяжимой нити, элементы которой свободны отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ. Вершины многоугольника находятся соотвѣтственно подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$, благодаря чему система можетъ принять опредѣленное положеніе равновѣсія, въ видѣ плоскаго или пространственнаго многоугольника. Найдемъ условія этого равновѣсія.

Разсмотримъ сперва случай, когда имѣются лишь двѣ точки M_1 и M_2 и двѣ силы F_1 и F_2 ; равновѣсіе можетъ имѣть мѣсто лишь при томъ условіи, что внѣшнія силы F_1 и F_2 , дѣйствующія на точки M_1 и M_2 , равны и прямопротивоположны. Это условіе необходимо, но недостаточно; необходимо еще, чтобы силы были направлены такимъ образомъ, чтобы растягивать нить. Если



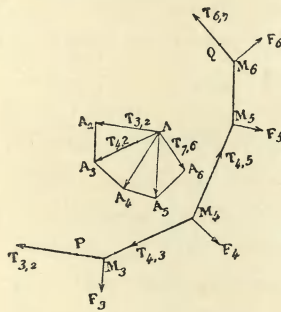
Фиг. 97.

бы онѣ были направлены такъ, что обѣ точки стали бы сближаться, то равновѣсіе, очевидно, было бы нарушено; чтобы сохранить равновѣсіе, пришлось бы тогда замѣнить нить твердымъ стержнемъ (фиг. 97).

125. Натяженіе. — Возьмемъ на нити M_1M_2 , находящейся въ равновѣсіи, какую-нибудь точку A и изолируемъ часть M_1A ; полученная нить M_1A находится въ равновѣсіи. На нее дѣйствуетъ только сила F_1 и часть AM_2 нити; необходимо, слѣдовательно, чтобы дѣйствіе этой части могло замѣняться силой, равной и прямопротивоположной силѣ F_1 . Эта сила называется натяженіемъ нити въ точкѣ A ; она равна по абсолютной величинѣ силѣ F_1 и одинакова во всѣхъ точкахъ нити. Точно такъ же часть AM_2 находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силы F_2 и натяженія, приложеннаго къ точкѣ A по направленію AM_1 ; наконецъ, произволь-

ная часть AB нити находится въ равновѣсїи подѣ дѣйствїемъ натяженїй, приложенныхъ къ двумъ концамъ этой части въ направле- нїяхъ AM_1 и BM_2 .

Вообще, разсматривая произвольную часть нитевого мно- гоугольника, находящагося въ равновѣсїи, напримѣръ, часть $PM_3M_4M_5M_6Q$, которая получится, когда мы разрѣжемъ нити M_2M_3 и M_6M_7 соотвѣтственно въ точкахъ P и Q , мы можемъ принять, что она находится въ равновѣсїи подѣ дѣйствїемъ силъ, непосредственно приложенныхъ къ вершинамъ M_3, M_4, M_5, M_6 (фиг. 98), и натяженїй сторонъ PM_3, M_6Q , при чемъ натяженїя приложены къ точкамъ P и Q въ направле- нїяхъ M_3P и M_6Q . Эти силы и эти два натяженїя удовлетворяютъ, слѣдовательно, условїямъ равновѣсїя силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.



Фиг. 98.

Напримѣръ, если силы F_3, F_4, F_5, F_6 имѣютъ только равно- дѣйствующую R , то будетъ имѣть мѣсто равновѣсїе между натя- женїями крайнихъ сторонъ M_3P и M_6Q и этой равнодѣйствующей.

126. Равновѣсїе нитевого многоугольника. Многоуголь- никъ Вариньона (Varignon). — Разсмотримъ нитевой многоуголь- никъ, находящїйся въ равновѣсїи подѣ дѣйствїемъ силъ, приложен- ныхъ къ его различнымъ вершинамъ. Чтобы избѣжать всякой пу- таницы относительно направле- нїй натяженїй, мы обозначимъ черезъ $T_{i,i+1}$ натяженїе стороны M_iM_{i+1} , дѣйствующее вдоль этой стороны въ направле- нїи M_iM_{i+1} , и черезъ $T_{i+1,i}$ — такое же натяженїе, дѣй-

ствующее въ противоположномъ направленіи, такъ что $T_{i,i+1}$ и $T_{i+1,i}$ обозначаютъ двѣ равныя и прямопротивоположныя силы.

Предположимъ, что нити M_2M_3 и M_6M_7 разрѣзаны соотвѣтственно въ точкахъ P и Q и что разсматривается часть $PM_3M_4M_5M_6Q$ нитевого многоугольника; эта часть находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ натяженій $T_{3,2}$ и $T_{6,7}$, приложенныхъ въ точкахъ P и Q , и данныхъ силъ F_3 , F_4 , F_5 , F_6 , дѣйствующихъ на промежуточныя вершины. Точка M_3 , разсматриваемая, какъ свободная, находится подѣ дѣйствіемъ силы F_3 и двухъ натяженій $T_{3,2}$ и $T_{3,4}$ нитей, прикрѣпленныхъ къ этой точкѣ; эти три силы, слѣдовательно, уравниваются. Точно такъ же точка M_4 находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ непосредственно приложенной силы F_4 и двухъ натяженій $T_{4,3}$, $T_{4,5}$ нитей, прикрѣпленныхъ къ этой точкѣ, и т. д.. Такимъ образомъ, мы получимъ условія равновѣсія, выразивъ, что каждая вершина находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ приложенной къ ней силы и натяженій нитей, заканчивающихся въ этой вершинѣ.

Эти условія могутъ быть представлены простымъ образомъ посредствомъ построенія, которое приводитъ къ многоугольнику Вариньона. Черезъ произвольную точку A проведемъ векторъ AA_2 , равный и параллельный натяженію $T_{3,2}$ первой разсматриваемой стороны, и черезъ точку A_2 векторъ A_2A_3 , геометрически равный силѣ F_3 ; такъ какъ три силы $T_{3,2}$, F_3 и $T_{3,4}$ взаимно уравниваются, то векторъ A_3A , замыкающій треугольникъ AA_2A_3 равенъ и параллеленъ натяженію $T_{3,4}$ и, слѣдовательно, векторъ AA_3 тождественъ съ $T_{4,3}$. Далѣе, силы $T_{4,3}$, F_4 и $T_{4,5}$ взаимно уравниваются; поэтому, если мы черезъ точку A_3 , конецъ вектора AA_3 , равнаго и параллельнаго $T_{4,3}$, проведемъ векторъ A_3A_4 , тождественный съ F_4 , то векторъ A_4A будетъ геометрически равенъ натяженію $T_{4,5}$, а противоположно направленный векторъ AA_4 будетъ геометрически равенъ $T_{5,4}$; продолжая постепенно такимъ образомъ, мы, наконецъ, проведемъ векторъ A_5A_6 , равный послѣднему натяженію $T_{7,6}$.

Итакъ, для равновѣсія разсматриваемой части $PM_3M_4M_5M_6Q$ (фиг. 98) нитевого многоугольника необходимо и достаточно, чтобы, построивъ послѣдовательно одинъ за другимъ векторы A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5A_6 , равные и параллельные силамъ F_3 , F_4 , F_5 , F_6 , приложеннымъ къ вершинамъ, можно было найти такую точку A ,

чтобы векторы AA_2 , AA_3 , AA_4 , AA_5 и AA_6 были параллельны сторонамъ PM_3 , M_3M_4 , M_4M_5 , M_5M_6 , M_6Q и были направлены соответственно противоположно послѣднимъ; послѣднее условіе вытекаетъ изъ того, что такой, напримѣръ, векторъ, какъ AA_3 , геометрически равенъ натяженію $T_{4,3}$, которое имѣетъ направленіе M_4M_3 .

Эти условія достаточны: дѣйствительно, при выполненіи ихъ каждая вершина M_i находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силы F_i и двухъ натяженій $T_{i,i-1}$ и $T_{i,i+1}$, соответственно равныхъ векторамъ AA_{i-1} и A_iA .

Главный моментъ крайнихъ натяженій $T_{3,2}$, $T_{6,7}$ и силъ F_3 , F_4 , F_5 , F_6 равенъ тогда нулю такъ же, какъ и результирующий моментъ каждой силы F_i и двухъ натяженій $T_{i,i-1}$, $T_{i,i+1}$, приложенныхъ къ точкѣ M_i . Разсматривая моменты силъ и натяженій относительно одной и той же точки, мы будемъ имѣть, слѣдовательно, векторы, изъ которыхъ можно было бы построить многоугольникъ, аналогичный многоугольнику Вариньона.

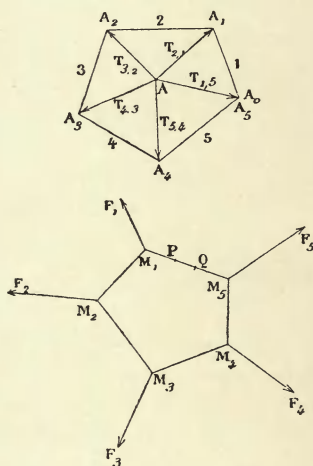
Можетъ случиться, что всѣ условія равновѣсія будутъ удовлетворены за исключеніемъ условій о направленіяхъ натяженій относительно звеньевъ; въ такомъ случаѣ нѣкоторые звенья будутъ сжиматься вмѣсто того, чтобы растягиваться, и равновѣсіе нарушится. Чтобы сохранить его, слѣдовало бы замѣнить эти звенья твердыми стержнями, которые могли бы оказать сопротивленіе сжатію.

127. Условія на концахъ. — Изложенныя условія равновѣсія должны выполняться въ любой части многоугольника. Крайнія же вершины нитевого многоугольника могутъ быть подчинены другого рода условіямъ, которыя называются условіями на концахъ.

1° Концы свободны. — Можетъ случиться, что нитевой многоугольникъ $M_1M_2 \dots M_n$ находится въ свободномъ состояніи въ пространствѣ, при чемъ его концы M_1 и M_n свободны и находятся подъ дѣйствіемъ извѣстныхъ силъ F_1 и F_n . Въ такомъ случаѣ извѣстны натяженія крайнихъ звеньевъ M_1M_2 и $M_{n-1}M_n$; дѣйствительно, конецъ M_1 находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силы F_1 и натяженія $T_{1,2}$; это натяженіе, слѣдовательно, равно и противоположно силѣ F_1 ; точно такъ же натяженіе $T_{n,n-1}$ равно и противоположно силѣ F_n .

2° Концы M_1 и M_n прикрѣплены къ неподвижнымъ точкамъ. — Въ этомъ случаѣ нужно взять въ качествѣ вспомо- гательныхъ неизвѣстныхъ силы F_1 и F_n , которыя представляютъ дѣй- ствія неподвижныхъ точекъ на концы M_1 и M_n или, что сводится къ тому же, два крайнія натяженія $T_{2,1}$ и $T_{n-1,n}$.

3° Нитевой многоугольникъ замкнуть. — Многоуголь- никъ замкнуть, если его послѣдняя точка, напримѣръ M_5 , связана нитью съ первой точкой M_1 . Въ этомъ случаѣ можно будетъ при- мѣнить общія условія равновѣсія и построение Вариньона ко всему многоугольнику, представляя себѣ, что нить M_1M_5 разрѣзана въ двухъ точкахъ P и Q , и что вдоль M_1P приложено натяженіе $T_{1,5}$, и вдоль M_5Q натяженіе $T_{5,1}$. Здѣсь нужно будетъ провести черезъ точку A векторъ AA_0 , равный и параллельный натяженію $T_{1,5}$, затѣмъ послѣдовательно одинъ за другимъ векторы A_0A_1 , A_1A_2 , ..., A_4A_5 , равные и параллельные силамъ F_1 , F_2 , ..., F_5 (фиг. 99); натяже-



Фиг. 99.

нія нитей будутъ соотвѣтственно равны и параллельны векторамъ AA_1 , AA_2 , ..., AA_5 , ибо натяженіе $T_{1,5}$ равно и параллельно вектору AA_0 , натяженіе $T_{2,1}$ — вектору AA_1 , ..., натяженіе $T_{k-1,k}$ — вектору AA_k , Послѣднее натяженіе $T_{1,5}$ будетъ равно и па- раллельно вектору AA_5 ; точка A_5 совпадетъ поэтому съ точкой A_0 , такъ какъ векторъ AA_0 тоже равенъ натяженію $T_{1,5}$.

Итакъ, для равновѣсія замкнутого нитевого многоугольника необходимо и достаточно:

1° чтобы многоугольникъ непосредственно приложенныхъ силъ былъ замкнутымъ, и

2° чтобы существовала точка A , отличающаяся тѣмъ свойствомъ, что каждая сторона $M_r M_{r+1}$ нитевого многоугольника параллельна прямой AA_r и обращена въ противоположную сторону.

Замѣчаніе. — Если число сторонъ нитевого многоугольника безпредѣльно возрастаетъ и каждая изъ нихъ стремится къ предѣлу нуль, то этотъ многоугольникъ, а также многоугольникъ Вариньона, превращается въ кривую. Этотъ предѣльный случай мы рассмотримъ непосредственно въ параграфѣ II.

Вообще, фигура равновѣсія представляетъ собой пространственный многоугольникъ; этотъ многоугольникъ будетъ плоскимъ, если силы $F_2, \dots, F_{n-1}$ будутъ сходящимися или параллельными.

128. Сходящіяся силы. Если въ открытомъ или замкнутомъ многоугольникѣ всѣ силы F , кромѣ двухъ крайнихъ силъ F_1 и F_n , будутъ сходящимися, то фигура равновѣсія будетъ плоской, и моменты натяженій около точки схожденія силъ всѣ равны между собою.

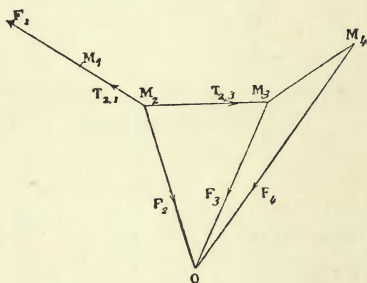
Пусть O будетъ точка схожденія силъ; мы видѣли, что матеріальную точку M_2 можно разсматривать, какъ находящуюся въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ силы F_2 и натяженій $T_{2,1}$ и $T_{2,3}$; такъ какъ эти силы должны взаимно уравновѣшиваться, то онѣ лежать въ одной плоскости P . Точно такъ же мы убѣдимся, что точки M_2, M_3, M_4, O лежатъ всѣ въ одной плоскости, которая совпадаетъ съ плоскостью P , имѣя съ нею три общія точки $O, M_2, M_3, \dots$. Продолжая такъ разсуждать, мы найдемъ, слѣдовательно, что фигура равновѣсія будетъ плоской и что ея плоскость проходитъ черезъ точку O .

Такъ какъ точка M_2 находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ силъ $F_2, T_{2,1}, T_{2,3}$, то геометрическая сумма моментовъ этихъ силъ около точки O есть нуль; но въ виду того, что моментъ силы F_2 равенъ нулю, мы заключаемъ, что сумма моментовъ натяженій $T_{2,1}$ и $T_{2,3}$ равна нулю, и моментъ натяженія силы $T_{1,2}$ равенъ моменту натяженія силы $T_{2,3}$. Продолжая такимъ образомъ, мы уви-

димъ, что всѣ натяженія $T_{r, r+1}$ имѣютъ одинаковый моментъ около точки O (фиг. 100).

129. Параллельныя силы. — Фигура равновѣсія будетъ плоской еще и въ томъ случаѣ, если всѣ силы, кромѣ двухъ крайнихъ, параллельны. Въ этомъ случаѣ проекціи натяженій на перпендикуляръ къ общему направленію силъ равны между собой.

Первая часть этого предложенія доказывается такимъ же образомъ, какъ и для случая сходящихся силъ; для доказательства вто-

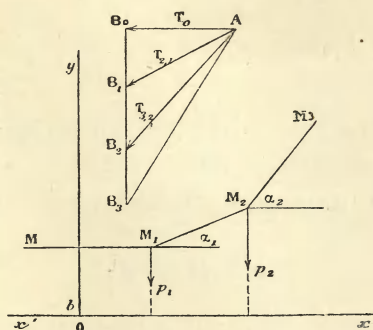


Фиг. 100.

рой частизамѣ тимъ слѣдующее: силы $F_2, T_{2,1}, T_{2,3}$ взаимно уравновѣшиваются, а потому алгебраическая сумма ихъ проекцій на перпендикуляръ $x'x$ къ направленію силъ равна нулю; но такъ какъ проекція силы F_2 равна нулю, то отсюда слѣдуетъ, что проекція натяженія $T_{1,2}$ равна проекціи натяженія $T_{2,3}$; послѣдняя, въ свою очередь, равна проекціи натяженія $T_{3,4}$ и т. д.

Приложеніе. Висячіе мосты. — Мы будемъ предполагать, что подвѣсныя штанги вертикальны, отстоятъ на равныхъ разстояніяхъ одна отъ другой и выдерживаютъ одинаковую тяжесть, что сводится къ допущенію однородности полотна, при чемъ мы пренебрегаемъ вѣсомъ цѣпи и штангъ. Допустимъ, наконецъ, что цѣпь симметрична относительно вертикальной плоскости, перпендикулярной къ плоскости цѣпи, гибка, нерастяжима и укрѣплена въ двухъ данныхъ симметричныхъ и неподвижныхъ точкахъ. Примемъ вертикальную плоскость, въ которой лежитъ цѣпь $MM_1M_2M_3\dots$, за плоскость чертежа, слѣдъ плоскости симметріи — за ось y -овъ и

слѣдъ xx' мостового полотна, которое предполагается горизонтальнымъ, за ось x -овъ. Число штангъ мы считаемъ четнымъ, т. е. мы предполагаемъ, что середину многоугольника занимаетъ горизонтальная сторона MM_1 (фиг. 101), натяженіе которой пусть будетъ T_0 .



Фиг. 101.

Обозначимъ черезъ a разстояніе между двумя штангами и черезъ x_k, y_k координаты вершины M_k . Координаты вершины M_1 будутъ $\frac{a}{2}, b$. Координаты другихъ вершинъ вычисляются послѣдовательно одна за другой при помощи формулъ

$$x_k = x_{k-1} + a, \quad y_k = y_{k-1} + a \tan \alpha_{k-1}, \quad (1)$$

гдѣ α_{k-1} есть уголъ, образуемый звеномъ $M_{k-1}M_k$ съ горизонтомъ. Этотъ уголъ получается въ многоугольникѣ Вариньона, который въ данномъ случаѣ составленъ горизонтальной прямой AB_0 , геометрически равной натяженію T_0 , и вертикальными отрѣзками $B_0B_1, B_1B_2, \dots$, которые направлены книзу и всѣ равны p . Отрѣзки AB_0, AB_1, AB_2 параллельны сторонамъ $M_1M, M_2M_1, M_3M_2, \dots$ и геометрически равны ихъ натяженіямъ $T_0, T_1, T_2, \dots$. Треугольникъ AB_0B_{k-1} дастъ намъ, слѣдовательно, для $\tan \alpha_{k-1}$ значеніе $\frac{(k-1)p}{T_0}$, и формулы (1) даютъ:

$$x_k = x_{k-1} + a \quad y_k = y_{k-1} + \frac{ap}{T_0}(k-1);$$

суммируя по k , при чемъ k получаетъ значенія $k=2, 3, \dots, k$, и замѣчая, что $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = b$, мы, по замѣнѣ суммы

$$1 + 2 + \dots + (k-1)$$

ея значеніемъ $\frac{1}{2} k (k-1)$, получимъ:

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)a, \quad y_k = b + \frac{ap}{T_0} \frac{k(k-1)}{2}. \quad (2)$$

Такимъ образомъ, мы находимъ координаты послѣдовательныхъ вершинъ; натяженіе T_k стороны $M_k M_{k+1}$ дается треугольникомъ $AB_0 B_k$, въ которомъ оно служитъ гипотенузой:

$$T_k = \sqrt{T_0^2 + k^2 p^2}.$$

Выраженіе для координаты y_k можно было бы получить непосредственно, замѣчая, что внѣшнія силы, приложенныя къ части $M_1 M_2 \dots M_k$, образуютъ систему приложенныхъ векторовъ, эквивалентную нулю, и что сумма ихъ моментовъ около точки M_k равна, слѣдовательно, нулю.

Въ выраженіи (2) входитъ еще неизвѣстное натяженіе T_0 . Чтобы опредѣлить его, замѣтимъ, что намъ извѣстна точка прикрѣпленія послѣдней вершины M_n , и, обозначая черезъ h высоту этой точки, мы должны имѣть:

$$h = b + \frac{ap}{T_0} \frac{n(n-1)}{2};$$

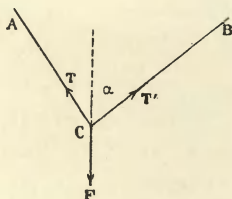
эта формула даетъ намъ значеніе T_0 . Вершины многоугольника лежатъ на параболѣ съ вертикальной осью. Дѣйствительно, при непрерывномъ измѣненіи числа k въ формулахъ

$$x = \frac{a}{2} + (k-1)a, \quad y = b + \frac{ap}{T_0} \frac{k(k-1)}{2}$$

точка (x, y) описываетъ параболу съ вертикальной осью, и вершины многоугольника представляютъ собой тѣ точки этой параболы, которыя соотвѣтствуютъ цѣлымъ значеніямъ числа k . Легко показать далѣе, что стороны многоугольника касаются въ своихъ серединахъ второй параболы съ вертикальной осью.

Если бы число штангъ было очень велико и стороны очень малы, то многоугольникъ можно было бы принять за кривую, которая, согласно предыдущему, должна была бы представлять собой параболу.

130. Кольца, скользящія вдоль нити. — Предположимъ, что гибкая и нерастяжимая нить закрѣплена своими двумя концами *A* и *B* и что бесконечно-малыя кольца могутъ скользить безъ тре-



Фиг. 102.

нія вдоль этой нити; эти кольца находятся подъ дѣйствіемъ извѣстныхъ силъ; требуется опредѣлить положеніе равновѣсія системы.

Въ случаѣ одного лишь кольца *C* сила *F* должна быть биссектриссой угла *ACB*, такъ какъ кольцо *C* можно разсматривать, какъ точку, движущуюся безъ тренія по эллипсу, фокусами котораго служатъ точки *A* и *B*; необходимо, слѣдовательно, чтобы сила была нормальна къ этому эллипсу и направлена наружу, т. е. такъ, чтобы нить была натянута. Пусть давленіе кольца на нить будетъ тогда равно *F*. Элементъ нити, лежащій въ точкѣ *C*, находится подъ дѣйствіемъ двухъ натяженій *T* и *T'* и силы *F*; такъ какъ послѣдняя служитъ биссектриссой угла между натяженіями *T* и *T'* и должна уравнивать ихъ, то эти два натяженія должны быть равны, и мы имѣемъ

$$F = 2 T \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Теперь легко перейти къ случаю, когда имѣется нѣсколько колецъ; если имѣть мѣсто равновѣсія, то каждая сила направлена по биссектриссѣ между двумя нитями, которыя сходятся у соответственнаго кольца, и натяженіе *T* нити вездѣ одинаково; если

$F_1, F_2, \dots$ суть дѣйствующія силы, и $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ послѣдовательные углы различныхъ частей нити, то (по Пуансо)

$$T = \frac{F_1}{2 \cos \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{F_2}{2 \cos \frac{\alpha_2}{2}} = \dots$$

Когда система находится въ равновѣсїи, то она, очевидно, сохранить его, если прикрѣпить кольца къ нити въ тѣхъ положенїяхъ, какія они занимаютъ; мы можемъ, слѣдовательно, примѣнить къ этой фигурѣ равновѣсія все изложенное нами относительно нитевого многоугольника. Такъ какъ въ этомъ случаѣ всѣ натяженія равны, то всѣ вершины $A_1, A_2, A_3, \dots$ многоугольника Вариньона (фиг. 98), за исключенїемъ первой вершины A , лежатъ на сферѣ, центръ которой находится въ вершинѣ A . Если многоугольникъ плоскій, то вершины $A_1, A_2, A_3, \dots$ лежатъ на окружности, центромъ которой служить вершина A .

II. — РАВНОВѢСІЕ НИТЕЙ.

131. Уравненія равновѣсія. — Найдемъ условія равновѣсія гибкой и нерастяжимой нити, находящейся подъ дѣйствїемъ постоянныхъ силъ. Эту задачу можно разсматривать, какъ предѣльный случай нитевыхъ многоугольниковъ при безконечномъ убыванїи сторонъ.

Принимая точку A за начало, обозначимъ черезъ s длину нити, считая эту длину положительной въ опредѣленную сторону AB (фиг. 103). Допустимъ, что внѣшнія силы, приложенныя къ элементу дуги ds , могутъ быть замѣнены одной силой $F ds$ порядка ds , приложенной въ нѣкоторой точкѣ этого элемента; проекціи этой силы будутъ

$$X ds, \quad Y ds, \quad Z ds,$$

гдѣ X, Y, Z обозначаютъ проекціи силы F , которая называется силой, отнесенной къ единицѣ длины.

Если, разсматривая часть AM нити, мы отбросимъ часть MB , то для того, чтобы удержать въ равновѣсїи часть AM , нужно будетъ приложить къ точкѣ M нѣкоторую силу T , которая называется натяженїемъ нити. Эта сила T , будучи направлена по элементу ds ,

касается нити и обращена въ сторону возрастающихъ дугъ AM , такъ какъ она должна натягивать нить. Направляющіе косинусы α , β , γ натяженія T опредѣляются равенствами

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}; \quad (1)$$

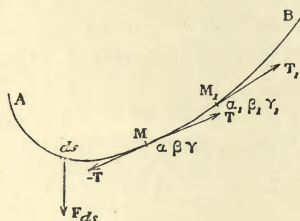
проекціи натяженія равны

$$T\alpha, \quad T\beta, \quad T\gamma.$$

Если бы, разрѣзавъ нить въ точкѣ M , мы удалили часть MA , то для того, чтобы удержать въ равновѣсіи часть MB , мы, въ силу принципа равенства дѣйствія, и противодѣйствія, должны были бы приложить къ точкѣ M силу — (T) . Проекціи этого новаго натяженія равны

$$-T\alpha, \quad -T\beta, \quad -T\gamma.$$

Разрѣжемъ нить въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ M , M_1 и сохранимъ лишь элементъ MM_1 . Этотъ элементъ находится въ рав-



Фиг. 103.

новѣсіи подѣ влияніемъ дѣйствующей на него силы Fds и двухъ натяженій — T , T_1 , которыя замѣняютъ собой дѣйствія отброшенныхъ частей нити; если обозначить черезъ α_1 , β_1 , γ_1 направляющіе косинусы натяженія T_1 , то его проекціи выразятся черезъ

$$T_1\alpha_1, \quad T_1\beta_1, \quad T_1\gamma_1.$$

Напишемъ, что сумма проекцій трехъ силъ на каждую ось равна нулю; мы будемъ имѣть уравненіе

$$T_1\alpha_1 - T\alpha + Xds = 0. \quad (1)$$

и два аналогичныхъ уравненія для двухъ другихъ осей. Такъ какъ $T_1\alpha_1 - T\alpha = d(T\alpha) = d\left(T\frac{dx}{ds}\right)^{19}$, то мы получаемъ, слѣдовательно, три уравненія равновѣсія:

$$\left. \begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X ds &= 0, \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y ds &= 0, \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Мы должны также написать, что сумма моментовъ трехъ силъ — T , T_1 , $F ds$ около каждой изъ трехъ осей равна нулю. Получаемыя такимъ образомъ уравненія являются слѣдствіями уравненій (2). Дѣйствительно, моменты трехъ силъ — T , T_1 , $F ds$ около оси x -овъ равны соотвѣтственно:

$$-(yT\gamma - zT\beta), \quad y_1T_1\gamma_1 - z_1T_1\beta_1, \quad (yZ - zY) ds,$$

гдѣ x , y , z , x_1 , y_1 , z_1 обозначаютъ координаты концовъ дуги ds ; сумма моментовъ натяженій — T и T_1 равна, слѣдовательно, $d(yT\gamma - zT\beta)$, и теорема о моментахъ даетъ:

$$\left. \begin{aligned} d(yT\gamma - zT\beta) + (yZ - zY) ds &= 0, \\ d(zT\alpha - xT\gamma) + (zX - xZ) ds &= 0, \\ d(xT\beta - yT\alpha) + (xY - yX) ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Первое изъ уравненій (3) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$T\gamma dy + yd(T\gamma) - T\beta dz - zd(T\beta) + (yZ - zY) ds = 0.$$

Въ силу уравненій (2) члены, содержащіе y и z , обращаются въ нуль, а въ силу уравненія (1) коэффициентъ при T равный $\gamma dy - \beta dz$, есть нуль.

Итакъ, если удовлетворяются уравненія (2), то удовлетворяются также и уравненія (3), т. е. уравненія (3) суть слѣдствія уравненій (2).

132. Общія теоремы. — Изъ формулъ (1) и (2) непосредственно вытекаютъ, какъ слѣдствія, слѣдующія двѣ теоремы:

Если сила F постоянно перпендикулярна къ одной оси, напимѣрь, къ оси Ox , то проекція натяженія на эту ось остается постоянной.

Дѣйствительно, равенство $X=0$ влечетъ за собой равенство $Ta = \text{const.}$

Если сила F лежитъ постоянно въ одной плоскости съ осью, напимѣрь, съ осью Ox , то моментъ натяженія около этой оси есть величина постоянная.

Дѣйствительно, если $yZ - zY = 0$, то $yT\gamma - zT\beta = \text{const}^{20}$.

133. Общiе интегралы. — Наиболѣе общимъ случаемъ является тотъ, въ которомъ сила F , отнесенная къ единицѣ длины, зависитъ отъ положенія и ориентировки элемента ds въ пространствѣ, а также отъ положенія его на нити; въ этомъ случаѣ X , Y , Z будутъ функциями отъ x , y , z , s , $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. При такихъ условіяхъ три уравненія равновѣсія (2), написанныя выше, вмѣстѣ съ уравненіемъ

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

составляютъ систему четырехъ дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ x , y , z , T въ функции s . Эти уравненія перваго порядка относительно T , но втораго порядка относительно x , y , z ; въ общiе интегралы войдутъ шесть постоянныхъ, которыми могутъ служить, напимѣрь, произвольно выбранныя значенія шести количествъ x , y , z , T , $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, соотвѣтствующія начальному значенію $s = s_0$. Мы найдемъ такимъ образомъ въ общемъ видѣ:

$$x = \varphi(s, C_1, C_2, \dots, C_6).$$

$$y = \psi(s, C_1, C_2, \dots, C_6).$$

$$z = \omega(s, C_1, C_2, \dots, C_6).$$

$$T = f(s, C_1, C_2, \dots, C_6).$$

Опредѣленіе постоянныхъ; предѣльные условія. — Шесть произвольныхъ постоянныхъ нужно будетъ опредѣлить при помощи предѣльныхъ условій. Простѣйшей задачей будетъ та, когда нить данной длины l закрѣплена на двухъ своихъ концахъ $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Взявъ начало дугъ въ точкѣ M_0 и написавъ, что для

$s=0$, $s=l$ значения x , y , z равны соответственно координатам двух точек M_0 и M_1 , мы получим шесть уравнений для определения шести постоянных. Эту систему нужно будет исследовать: она может допускать одно, два или даже бесконечное множество решений.

Можно также предположить, что нить закреплена одним своим концом $M_{0(x_0, y_0, z_0)}$, а на другом оканчивается бесконечно малым кольцом, которое может скользить без трения по неизменяемой кривой C , имющей уравнения

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (C)$$

Мы получим, во-первых, три уравнения, написать, что при $s=0$ значения x , y , z соответственно равны координатам x_0 , y_0 , z_0 точки M_0 ; далее нужно написать, что, при $s=l$, значения x_1 , y_1 , z_1 переменных x , y , z удовлетворяют уравнениям кривой (C) и что направление натяжения, т. е. направление касательной к нити в точке M_1 нормально к этой кривой, потому что кольцо может скользить без трения; таким образом мы опять получим шесть уравнений для определения постоянных.

Если конец M_1 нити движется без трения по данной поверхности, то нужно подобным же образом выразить, что при $s=$ значения x_1 , y_1 , z_1 удовлетворяют уравнению поверхности и что касательная в точке M_1 к нити нормальна к поверхности.

134. Случай, когда сила не зависит от дуги. — Часто случается, что выражения X , Y , Z не содержат явно дуги s ; заменив в этом случае всюду в уравнениях (2) ds через $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, мы можем принять x за независимую переменную, при чем получатся три уравнения для определения y , z , T в функции x . Интегралы содержат тогда пять постоянных, которыми могут быть, например, значения, получаемые переменными y , z , T , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ для начального значения $x=x_0$. Пусть общие интегралы будут

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_5), \\ z &= \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_5), \\ T &= f(x, C_1, C_2, \dots, C_5). \end{aligned}$$

Если мы желаемъ выразить, что нить имѣтъ данную длину и прикреплена своими двумя концами къ точкамъ (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) , то мы пишемъ, что координаты y, z принимаютъ при $x=x_0$ значенія y_0, z_0 , а при $x=x_1$ значенія y_1, z_1 ; наконецъ, написавъ, что длина дуги равна l , мы будемъ имѣтъ пять уравненій, необходимыхъ для опредѣленія постоянныхъ.

135. Замѣчаніе о натяженіи. — Найденное рѣшеніе пригодно лишь въ томъ случаѣ, если натяженіе T будетъ положительнымъ: дѣйствительно, если T будетъ отрицательнымъ для нѣкотораго элемента, то послѣдній будетъ подверженъ сжатію, а не натяженію. Рѣшенія, въ которыхъ натяженіе T имѣтъ отрицательное значеніе, можно будетъ интерпретировать, предположивъ, что нить замѣнена четками изъ бесконечно-малыхъ твердыхъ шариковъ: тогда каждый шарикъ испытываетъ давленіе отъ предыдущаго и послѣдующаго, и равновѣсіе будетъ имѣтъ мѣсто (Пуансо).

136. Внутреннія уравненія равновѣсія нити. — Такъ называются условія равновѣсія, не зависящія отъ осей координатъ. Эти уравненія аналогичны внутреннимъ выраженіямъ, дающимъ проекціи ускоренія на касательную, главную нормаль и бинормаль (п. 40). Для полученія внутреннихъ уравненій равновѣсія мы опять будемъ искать проекціи силы F на направленную въ сторону положительныхъ дугъ касательную Mt къ кривой, по которой располагается нить, на главную нормаль MN въ сторону вогнутости и на бинормаль MB ; эти проекціи мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ F_t, F_n, F_b .

Будемъ пользоваться тѣмъ же методомъ, который служилъ намъ для ускоренія.

Черезъ начало O проведемъ (фиг. 104) векторъ OM' , геометрически равный натяженію MT въ точкѣ M , отложенному на касательной въ положительномъ направленіи Mt . Координаты x', y', z' точки M' суть проекціи натяженія:

$$x' = Ta, \quad y' = T\beta, \quad z' = T\gamma.$$

Уравненія равновѣсія (2) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dx'}{ds} = -X, \quad \frac{dy'}{ds} = -Y, \quad \frac{dz'}{ds} = -Z.$$

последнее уравнение вытекает из того, что сила F лежитъ въ соприкасающейся плоскости.

Эти три уравненія (4) составляютъ систему внутреннихъ уравненій равновѣсія. Такъ какъ сила F_N имѣетъ отрицательное значеніе, то сила F въ соприкасающейся плоскости обращена въ сторону выпуклости кривой. Кромѣ того, сила направлена относительно главной нормали въ ту сторону, куда нужно перемѣстить точку M для того, чтобы натяженіе убывало: дѣйствительно, если натяженіе T , напримѣръ, возрастаетъ съ дугой s , то значеніе F_t будетъ отрицательнымъ, и сила обращена въ сторону, противоположную Mt .

Если сила постоянно нормальна къ нити, то натяженіе остается постояннымъ, потому что въ этомъ случаѣ $F_t=0$; производная отъ натяженія будетъ, слѣдовательно, нулемъ.

137. Формулы, дающія натяженіе въ случаѣ существованія силовой функціи. — Умножимъ уравненія равновѣсія (2) соответственно на α , β , γ и сложимъ ихъ, замѣнивъ α , β , γ черезъ $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; мы получимъ формулу

$$dT = -(X dx + Y dy + Z dz),$$

которая представляетъ собою не что иное, какъ первое изъ внутреннихъ уравненій (4).

Это последнее уравненіе имѣетъ очень важное значеніе: оно даетъ намъ возможность опредѣлить непосредственно натяженіе въ томъ случаѣ, когда проекціи силы X , Y , Z зависятъ только отъ координатъ x , y , z и являются производными отъ силовой функціи $U(x, y, z)$. Обозначая черезъ h постоянную величину, мы имѣемъ въ этомъ случаѣ формулу:

$$dT = -dU, \quad T = -(U + h),$$

которая даетъ натяженіе въ конечномъ видѣ, хотя фигура равновѣсія намъ неизвѣстна. Это значеніе натяженія мы подставимъ въ уравненія равновѣсія, которыя приводятся тогда къ двумъ.

Когда функція U получаетъ вновь значеніе, которое она уже имѣла раньше, то и натяженіе получаетъ прежнее значеніе; поэтому, если U есть однозначная функція отъ x , y , z , то натяженіе одинаково во всѣхъ точкахъ нити, лежащихъ на одной поверхности уровня. Если же функція U не будетъ однозначной, напримѣръ,

если $U = \text{arc tang } \frac{y}{x}$, то поверхностями уровня служат плоскости $y = x \text{ tang } C$, и при повторномъ прохожденіи нити черезъ одну изъ этихъ плоскостей натяженіе можетъ получить одно изъ значеній $C \pm k\pi$. Относительно этого выраженія для T можно было бы повторить здѣсь все то, что было сказано въ главѣ III относительно полной работы.

138. Параллельныя силы. — Наиболѣе простымъ является случай, когда внѣшнія силы параллельны другъ другу; фигурой равновѣсія служить тогда плоская кривая, плоскость которой параллельна направленію этихъ силъ, а проекція натяженія на прямую, перпендикулярную къ этому направленію, остается постоянной. Эти два свойства можно разсматривать, какъ слѣдствія аналогичныхъ свойствъ, доказанныхъ для нитевыхъ многоугольниковъ; мы докажемъ ихъ прямо.

Предположимъ, что ось Oy параллельна общему направленію силъ; проекціи X и Z будутъ постоянно равны нулю; интегрируя первое и послѣднее изъ уравненій равновѣсія (2), мы получимъ:

$$T \left(\frac{dx}{ds} \right) = A, \quad T \left(\frac{dz}{ds} \right) = B;$$

исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій T , мы найдемъ, что

$$A dz - B dx = 0, \quad Az - Bx = C.$$

Это есть уравненіе плоскости, параллельной оси Oy ; такимъ образомъ, первая часть нашего предложенія доказана. Примемъ теперь эту плоскость за плоскость xy . Мы будемъ имѣть два уравненія равновѣсія:

$$T \frac{dx}{ds} = A, \quad d \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y ds = 0.$$

Опредѣливъ значеніе T изъ перваго уравненія, подставивъ его во второе и обозначивъ черезъ y' производную $\frac{dy}{dx}$, мы получимъ соотношеніе:

$$A dy' + Y ds = 0; \quad (5)$$

это есть дифференціальное уравненіе фигуры равновѣсія.

Примѣръ: Цѣпная линія. — Примѣнимъ эти вычисленія для нахожденія фигуры равновѣсія однородной и тяжелой цѣпи. Галилей полагалъ, что эта фигура равновѣсія есть парабола; ошибку Галилея исправилъ Гюйгенсъ (Huygens).

Пусть p будетъ вѣсъ единицы длины цѣпи; на элементъ ds дѣйствуетъ вертикальная сила $p ds$; фигура равновѣсія будетъ, слѣдовательно, плоской и должна лежать въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ двѣ точки подвѣса. Примемъ эту плоскость за плоскость xu и направимъ ось y -овъ вертикально вверхъ; тогда

$$Y ds = -p ds \quad \text{или} \quad Y = -p;$$

уравненія равновѣсія выразятся такъ:

$$T \frac{dx}{ds} = A, \quad (1)$$

$$A dy' - p ds = 0. \quad (2)$$

Величину A мы всегда можемъ считать положительной; дѣйствительно, T есть существенно положительная величина и если положительнымъ направлениемъ дугъ кривой мы будемъ считать то, въ которомъ величины x и s одновременно возрастаютъ, то производная $\frac{dx}{ds}$ будетъ положительной; поэтому постоянная A также будетъ положительной. Мы можемъ обозначить ее черезъ pa , гдѣ a есть положительное количество. Подставивъ вмѣсто ds его значеніе

$$ds = +\sqrt{1+y'^2} dx$$

въ уравненіе (2), мы приведемъ послѣднее къ виду

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a};$$

интегрируя это уравненіе, мы найдемъ, что

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x-x_0}{a}}; \quad (3)$$

отсюда мы выводимъ уравненіе

$$y' - \sqrt{1+y'^2} = -e^{-\frac{x-x_0}{a}}; \quad (4)$$

сложивъ эти два уравненія, мы найдемъ y' ; интегрируя вторично, мы найдемъ уравненіе кривой

$$y - y_0 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}} \right).$$

Перенесемъ начало въ точку $O_1(x_0, y_0)$ (фиг. 105); новое уравненіе кривой будетъ

$$y_1 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}} \right).$$

Это есть кривая, симметричная относительно оси O_1y_1 ; ось O_1x_1 называется основаніемъ цѣпной линіи.

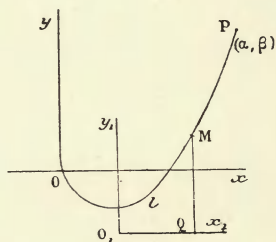
Вычитывая уравненіе (4) изъ уравненія (3), мы найдемъ:

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}} \right) = \frac{y_1}{a};$$

формула (1) даетъ намъ теперь натяженіе

$$T = A \frac{dx}{ds} = A \sqrt{1 + y'^2} = A \frac{y_1}{a} = p y_1.$$

Мы видимъ, что натяженіе въ точкѣ M равно вѣсу отрѣзка нити, длина котораго равна ординатѣ MQ , т. е. разстоянію этой



Фиг. 105.

точки отъ основанія. Поэтому, если мы помѣстимъ въ точкѣ M безконечно-малый блокъ и, разрѣзавъ нить въ точкѣ Q , перекинемъ черезъ блокъ часть нити, первоначально лежавшую выше точки M , то равновѣсіе не нарушится.

Опредѣленіе постоянныхъ въ случаѣ, когда концы закрѣплены. — Въ уравненіи цѣпи содержатся три постоянныя

x_0, y_0, a_0 , которыя опредѣляются предѣльными условіями. Согласно раньше принятымъ условіямъ, постоянная a должна быть положительной. Возьмемъ начало въ той изъ двухъ точекъ прикрѣпленія, которая лежитъ ниже, и направимъ ось x -овъ такъ, чтобы вторая точка прикрѣпленія лежала въ углѣ положительныхъ координатъ. Пусть α, β будутъ координаты этой точки и l длина нити (фиг. 105).

Напишемъ, что кривая проходитъ черезъ точки $O(0,0)$ и $P(\alpha, \beta)$:

$$-y_0 = \frac{a}{2} \left(e^{-\frac{x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}} \right), \quad (1)$$

$$\beta - y_0 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}} \right). \quad (2)$$

Чтобы получить третье уравненіе, напишемъ, что нить имѣетъ длину l . Мы имѣемъ:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}} \right) dx;$$

интегрированіе между предѣлами 0 и α даетъ намъ длину нити:

$$l = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}} + e^{-\frac{x_0}{a}} \right); \quad (3)$$

вычитая уравненіе (1) изъ уравненія (2), мы получимъ:

$$\beta = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}} + e^{-\frac{x_0}{a}} \right). \quad (4)$$

Уравненія (3) и (4) будутъ служить для опредѣленія a и x_0 . Изъ нихъ легко вывести, что

$$\begin{aligned} l + \beta &= a \left(e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} \right) = a e^{-\frac{x_0}{a}} \left(e^{\frac{\alpha}{a}} - 1 \right), \\ l - \beta &= a \left(e^{\frac{x_0}{a}} - e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}} \right) = a e^{\frac{x_0}{a}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{a}} \right); \end{aligned}$$

для исключенія x_0 достаточно перемножить эти уравненія и мы получимъ:

$$l^2 - \beta^2 = a^2 \left(e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}} - 2 \right);$$

выраженіе въ скобкахъ есть квадратъ разности $e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}}$, поэтому

$$+ \sqrt{l^2 - \beta^2} = \pm a \left(e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}} \right).$$

Казалось бы, что мы должны здѣсь разсматривать два знака; однако, согласно нашему выбору осей, количества a и a будутъ положительными, и, слѣдовательно, выраженіе $a \left(e^{\frac{a}{2a}} - e^{-\frac{a}{2a}} \right)$ будетъ положительнымъ, такъ что мы должны взять только знакъ $+$. Положимъ $\frac{a}{2a} = u$; неизвѣстная u будетъ положительной, и уравненіе относительно u принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{a} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u};$$

мы должны найти положительныя рѣшенія этого уравненія. Разложимъ правую часть уравненія въ рядъ:

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{a} = 1 + \frac{u^2}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4.5} + \dots + \frac{u^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

Съ возрастаніемъ u отъ 0 до безконечности, правая часть постоянно возрастаетъ отъ 1 до безконечности; поэтому для существованія положительнаго корня необходимо и достаточно, чтобы лѣвая часть была больше 1; если это условіе выполнено, то уравненіе имѣетъ положительный корень и при томъ только одинъ. Итакъ, единственное условіе возможности задачи состоитъ въ томъ, чтобы выполнялось соотношеніе

$$\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{a} > 1, \quad l > \sqrt{a^2 + \beta^2},$$

т. е. длина нити должна превышать разстояніе между точками прикрѣпленія. Если это условіе выполняется, то мы опредѣляемъ значеніе u и, продолжая предыдущія вычисленія, находимъ, что три постоянныя a , x_0 , y_0 имѣютъ единственную систему значеній; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ существуетъ положеніе равновѣсія и при томъ только одно.

Пусть u' будетъ положительный корень уравненія относительно u . Это уравненіе допускаетъ также отрицательный корень $-u'$. Пуансо истолковываетъ это рѣшеніе слѣдующимъ образомъ: опрокинутая цѣпная линія, которая дается намъ рѣшеніемъ $u = -u'$, есть фигура равновѣсія, имѣющая видъ свода и образуемая рядомъ твердыхъ сферическихъ шариковъ, равныхъ, совершенно гладкихъ и имѣющихъ безконечно малый діаметръ.

139. Центральныя силы. — Фигура равновѣсія есть плоская кривая, плоскость которой проходить черезъ точку сходященія силъ, и моментъ натяженія около послѣдней остается постояннымъ.

Эти предложенія можно было бы разсматривать, какъ слѣдствія изъ аналогичныхъ предложеній, установленныхъ для нитевыхъ многоугольниковъ; мы докажемъ ихъ прямо.

Какъ мы уже видѣли (п. 132), моментъ натяженія около оси остается постояннымъ, если моментъ силы F около этой оси постоянно равенъ нулю.

Такъ какъ внѣшнія силы сходятся, то мы можемъ взять начало въ точкѣ сходященія; предыдущая теорема въ примѣненіи къ тремъ осямъ даетъ слѣдующія уравненія:

$$T \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) = A,$$

$$T \left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} \right) = B,$$

$$T \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = C;$$

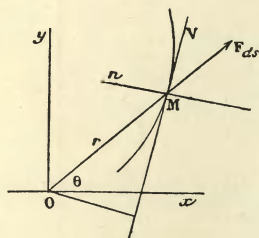
умноживъ эти уравненія соответственно на x , y , z и сложивъ ихъ почленно, мы получимъ уравненіе:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Кривая равновѣсія будетъ, слѣдовательно, плоской, и ея плоскость проходить черезъ начало.

Принявъ эту плоскость за плоскость xy и обозначивъ черезъ F силу, отнесенную къ единицѣ длины, при чемъ эта сила принимается за положительную въ случаѣ притяженія и за отрицательную въ случаѣ отталкиванія, мы найдемъ ея проекціи

$$X = F \frac{x}{r}, \quad Y = F \frac{y}{r}.$$



Фиг. 106.

Уравненія равновѣсія преобразуются слѣдующимъ образомъ (фиг. 106):

Уравненіе моментовъ около оси Oz даетъ, какъ мы видѣли:

$$T \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = C,$$

и, съ другой стороны,

$$dT + X dx + Y dy = 0;$$

если ввести полярныя координаты r и θ , то эти два уравненія примутъ слѣдующій видъ:

$$T r^2 \frac{d\theta}{ds} = C, \quad dT + F dr = 0. \quad (1)$$

Примѣръ. — Предположимъ, что каждый элементъ ds нити притягивается къ центру O съ силой, пропорціональной элементу ds :

$$F ds = -k ds,$$

гдѣ k есть постоянная. Въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть:

$$dT - k dr = 0, \quad T = kr + h.$$

Первое изъ уравненій (1) теперь принимаетъ слѣдующій видъ:

$$(kr + h) r^2 d\theta = C ds.$$

Возвысивъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ и замѣнивъ ds^2 выраженіемъ $dr^2 + r^2 d\theta^2$, мы можемъ раздѣлить переменныя r и θ и найти уравненіе кривой:

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \pm \frac{C dr}{r \sqrt{r^2 (kr + h)^2 - C^2}}.$$

Это есть эллиптический интегралъ: положивъ $h=0$ и принявъ за переменную выраженіе $\frac{1}{r^2}$, мы можемъ выполнить интегрированіе, при чемъ получится равносторонняя гипербола.

140. Равновѣсіе нити на поверхности. — Пусть $f(x, z, y) = 0$ будетъ уравненіе поверхности, отнесенное къ тремъ прямоугольнымъ осямъ. Положимъ, что нить находится подъ дѣйствіемъ непрерывныхъ внѣшнихъ силъ и обозначимъ черезъ $F(X, Y, Z)$ силу, отнесенную къ единицѣ длины въ рассматриваемой точкѣ.

Если нить может скользить безъ тренія, то реакція поверхности будетъ нормальной; назовемъ черезъ N эту реакцію, отнесенную къ единицѣ длины. Ея проекціи равны

$$\lambda \frac{df}{dx}, \quad \lambda \frac{df}{dy}, \quad \lambda \frac{df}{dz};$$

нить можно разматривать, какъ находящуюся въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ силъ $F ds$ и $N ds$, равнодѣйствующая которыхъ равна Φds . Примѣняя общія формулы равновѣсія нитей, мы получаемъ три уравненія:

$$\left. \begin{aligned} d \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} ds &= 0, \\ d \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} ds &= 0, \\ d \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} ds &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

которыя вмѣстѣ съ уравненіями

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1, \quad f(x, y, z) = 0$$

опредѣляютъ x, y, z, T, λ въ функціи s . Когда мы найдемъ значеніе λ , то будемъ знать нормальную реакцію; она направлена относительно поверхности $f=0$ въ ту сторону, гдѣ функція f становится положительной или отрицательной, въ зависимости отъ того, будетъ ли множитель λ положительнымъ или отрицательнымъ.

Чтобы опредѣлить натяженіе, вспомнимъ, что мы нашли въ общемъ случаѣ уравненіе:

$$dT = -(X dx + Y dy + Z dz). \quad (2)$$

Здѣсь эта формула получаетъ слѣдующій видъ:

$$dT = - \left[\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right) dz \right];$$

такъ какъ нить лежитъ вся на поверхности, то коэффициентъ при λ равенъ нулю; остается, такимъ образомъ, та же формула (2), какъ и въ случаѣ свободной нити. Если существуетъ силовая функція $U(x, y, z)$, то

$$dT = -dU, \quad T = -(U + h).$$

Напримѣръ, если мы помѣстимъ на поверхности однородную тяжелую нить и направимъ ось Oz вертикально кверху, то сила F будетъ параллельна этой оси, направлена въ противоположную сторону и равна по абсолютной величинѣ вѣсу p единицы длины нити; въ этомъ случаѣ

$$dT = p dz, \quad T = p(z - h).$$

Разсмотримъ неподвижную плоскость $z = h$; предыдущая формула показываетъ, что натяженіе въ точкѣ M равно вѣсу отрѣзка нити, равнаго разстоянію MQ точки M отъ этой плоскости. Поэтому, если мы удалимъ часть MP нити (фиг. 105) и оставимъ висѣть часть, равную отрѣзку MQ , перекинувъ ее черезъ маленькій блокъ въ точкѣ M , то равновѣсіе не нарушится.

Примѣры. — 1° Геодезическія линіи. — Разсмотримъ простѣйшій случай, когда нить, натянутая на поверхности, находится подѣйствіемъ единственно лишь нормальной реакціи N ; въ этомъ случаѣ предыдущее уравненіе приводится къ виду $dT = 0$, и натяженіе нити будетъ постояннымъ. Нить расположится по геодезической линіи поверхности: дѣйствительно, такъ какъ соприкасающаяся плоскость въ любой точкѣ нити должна содержать силу N , то она будетъ нормальной къ поверхности, чѣмъ и характеризуются геодезическія линіи.

На сферѣ эта линія будетъ окружность большого круга: дѣйствительно, такъ какъ реакціи проходятъ черезъ центръ, то нить находится подѣйствіемъ центральныхъ силъ, и фигура равновѣсія должна лежать въ плоскости, проходящей черезъ центръ.

На цилиндрѣ мы найдемъ винтовые линіи.

2° Однородная тяжелая цѣпь на поверхности вращенія вокругъ вертикальной оси. — Направимъ ось Oz вертикально кверху по оси вращенія, и пусть r , θ , z будутъ цилиндрическія координаты точки на поверхности; уравненіе поверхности будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$z = f(r).$$

Обозначимъ черезъ p вѣсъ единицы длины нити; мы имѣемъ, во-первыхъ, уравненіе

$$T = pz + h,$$

гдѣ h обозначаетъ постоянную; далѣе, въ виду того, что двѣ силы, приложенныя къ элементу ds (вѣсъ и нормальная реакція) лежатъ въ одной плоскости съ осью Oz , моментъ ихъ равнодѣйствующей около оси Oz равенъ нулю, и (п. 132)

$$Tr^2 d\theta = C ds.$$

Подставивъ вмѣсто ds^2 выраженіе $dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$, мы имѣемъ, такимъ образомъ, три уравненія, которыми опредѣляются неизвѣстныя T , θ и z въ функции r . Въ частности, исключивъ T и z , мы найдемъ уравненіе горизонтальной проекціи фигуры равновѣсія

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \pm \frac{C}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{(pf + h)^2 r^2 - C^2}} dr,$$

гдѣ f и f' обозначаютъ $f(r)$ и $f'(r)$. Если $p = 0$, то нить располагается по геодезической линіи.



ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

ДИНАМИКА.

ГЛАВА VII.

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

I. — ОБЩІЯ ТЕОРЕМЫ.

141. Уравненія движенія. — Предположимъ, что точка M , имѣющая массу m , находится подъ дѣйствиемъ силъ, представляемыхъ въ моментъ t векторами $F_1, F_2, \dots, F_n$. Пусть x, y, z будутъ координаты точки m и $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), \dots, (X_n, Y_n, Z_n)$ проекціи силъ на оси; проекціи X, Y, Z равнодѣйствующей F этихъ силъ равны

$$(F) \quad X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i;$$

проекціи ускоренія (J) равны

$$(J) \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Геометрическое равенство $\vec{F} = m \vec{J}$ показываетъ, что проекціи силы F на каждую изъ трехъ осей равны соответственнымъ проек-

ціямъ ускоренія J , умноженнымъ на m ; такимъ образомъ, мы имѣемъ три уравненія движенія

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z, \quad (1)$$

изъ которыхъ выводятся всѣ теоремы.

142. Свободная точка. — Если предположимъ, что движущаяся точка совершенно свободна, то дѣйствующія на нее силы въ самомъ общемъ случаѣ будутъ функціями отъ ея положенія, ея скорости и времени; проекціи X , Y , Z равнодѣйствующей будутъ, слѣдовательно, заданными функціями отъ x , y , z , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ и t или функціями отъ x , y , z , x' , y' , z' , t , если пользоваться Лагранжевымъ обозначеніемъ производныхъ: $\frac{dx}{dt} = x'$, Уравненія (1) составляютъ, слѣдовательно, систему трехъ совокупныхъ дифференціальнхъ уравненій второго порядка, опредѣляющихъ координаты x , y , z въ функціи времени t . Общія интегралы этихъ уравненій будутъ содержать шесть произвольныхъ постоянныхъ и будутъ вида

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= \psi(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= \omega(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

отсюда выводятся уравненія

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varphi'(t, C_1, \dots, C_6), \\ y' &= \psi'(t, C_1, \dots, C_6), \\ z' &= \omega'(t, C_1, \dots, C_6), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

гдѣ φ' , ψ' , ω' обозначаютъ производныя по t функцій φ , ψ , ω .

Въ каждой частной задачѣ произвольныя постоянныя должны быть опредѣлены при помощи начальныхъ условий. Если заданы положеніе и скорость движущейся точки въ моментъ $t = t_0$, то нужно опредѣлить постоянныя $C_1, C_2, \dots, C_6$ такимъ образомъ, чтобы при $t = t_0$ координаты x , y , z получили напередъ заданныя значенія x_0, y_0, z_0 , а производныя x' , y' , z' — заданныя значенія x'_0, y'_0, z'_0 . Для того, чтобы это опредѣленіе было возможно при всякихъ данныхъ начальныхъ значеніяхъ для x, y, z, x', y', z' , необходимо, чтобы мы были въ состояніи рѣшить, по меньшей мѣрѣ, теорети-

чески, систему шести уравнений (2) и (3) относительно постоянных $C_1, C_2, \dots, C_6$, т. е. необходимо, чтобы эти уравнения (2) и (3), въ которыхъ $C_1, C_2, \dots, C_6$ разсматриваются, какъ неизвѣстныя, не были ни несовмѣстимыми, ни неопредѣленными. При такомъ условіи мы получимъ изъ нихъ для этихъ шести постоянныхъ выраженія вида

$$C_k = f_k(t, x, y, z, x', y', z') \quad (k=1, 2, \dots, 6);$$

они дадутъ намъ непосредственно численныя значенія постоянныхъ, если будутъ даны начальныя значенія x, y, z, x', y', z' .

Допускаютъ, что даннымъ начальнымъ условіямъ соответствуетъ только одно движеніе. Въ справедливости этого положенія мы убѣдимся на всѣхъ примѣрахъ, которые мы будемъ разсматривать. Оно вытекаетъ изъ теоремы Коши, если только проекціи X, Y, Z представляютъ собою правильныя функціи отъ x, y, z, x', y', z' ; если шесть произвольныхъ постоянныхъ суть $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$, то мы можемъ рѣшить интегралы относительно этихъ постоянныхъ. Поэтому, если мы на основаніи какихъ-либо соображеній нашли нѣкоторое возможное движеніе, т. е. такое, которое удовлетворяетъ уравненіямъ движенія и начальнымъ условіямъ, то это движеніе и будетъ то именно, которое имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности.

Первые интегралы. — Первымъ интеграломъ уравненій движенія называется уравненіе, которое, связывая t, x, y, z, x', y', z' и произвольную постоянную, удовлетворяется въ силу уравненій движенія, каковы бы ни были начальныя условія:

$$\Phi(t, x, y, z, x', y', z', C) = 0.$$

Мы всегда можемъ представить себѣ, что это уравненіе рѣшено относительно C , и написать:

$$C = f(t, x, y, z, x', y', z').$$

Вотъ способъ для того, чтобы провѣрить непосредственно, представляетъ ли собою соотношеніе этого вида первый интегралъ: дифференцируя по t , мы получимъ уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$$

которое по замѣщеніи вторыхъ производныхъ отъ координатъ x, y, z ихъ значеніями, получаемыми изъ уравненій движенія, преобразуется въ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{1}{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} X + \frac{\partial f}{\partial y'} Y + \frac{\partial f}{\partial z'} Z \right) = 0$$

Это послѣднее соотношеніе содержитъ только количества t, x, y, z, x', y', z' ; такъ какъ оно должно имѣть мѣсто, каковы бы ни были начальныя условія, т. е., какія бы значенія ни были приписаны всѣмъ этимъ количествамъ, то оно должно удовлетворяться тождественно.

Нѣсколько первыхъ интеграловъ

$$\left. \begin{aligned} C' &= f_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ C'' &= f_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ &\dots\dots\dots, \\ C^{(v)} &= f_v(t, x, y, z, x', y', z') \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

будутъ независимыми, если изъ нихъ нельзя исключить всѣхъ количествъ x, y, z, x', y', z' ; если бы это исключеніе было возможно, то оно привело бы къ соотношенію между $C', C'', \dots, C^{(v)}$, которое, очевидно, не могло бы содержать и независимой переменнѣй t , такъ какъ она принимаетъ произвольныя значенія. Отсюда слѣдуетъ, что число независимыхъ первыхъ интеграловъ, которые можно найти, равно шести: дѣйствительно, если бы число v превышало шесть, то мы могли бы всегда исключить шесть количествъ x, y, z, x', y', z' .

Напримѣръ, шесть уравненій (4), которыя получаются при рѣшеніи общихъ интеграловъ уравненій движенія относительно произвольныхъ постоянныхъ, представляютъ собою шесть независимыхъ первыхъ интеграловъ.

Обратно, если мы имѣемъ шесть независимыхъ первыхъ интеграловъ вида (5), гдѣ цѣлое число v равно 6, то, рѣшивъ эти уравненія относительно x, y, z, x', y', z' , мы найдемъ общіе интегралы уравненій движенія.

143. Несвободная точка. — Аналогичныя разсужденія примѣняются къ движенію точки на поверхности или на кривой; мы приведемъ ихъ ниже. Если точка движется по данной поверхности, то общіе интегралы движенія содержатъ четыре постоянныя; если она движется по кривой, то они содержатъ двѣ постоянныя.

Относительно представляющагося здѣсь вопроса изъ области анализа см. Appell, Cours d'Analyse á l'Ecole Centrale, глава XXII (изд. Gauthier-Villars).

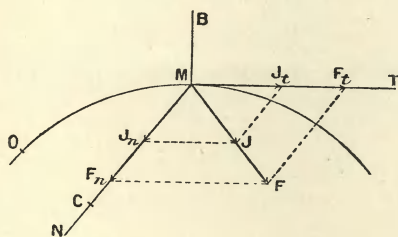
144. Внутреннія уравненія (Эйлерь). — Возьмемъ на траекторіи начало O дугъ; движеніе будетъ опредѣлено на этой кривой, если будемъ знать дугу $OM=s$ въ функціи времени t . Проведемъ касательную MT (фиг. 107) въ сторону положительныхъ дугъ. Скорость v , которая считается положительной въ направленіи MT , есть

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Пусть J будетъ ускореніе движущейся точки; мы знаемъ, что проекціи этого ускоренія на касательную и главную нормаль равны соответственно (п. 40):

$$J_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad J_n = \frac{v^2}{\rho},$$

а его проекція на бинормаль есть нуль. Отрѣзокъ, представляющій силу, равенъ отрѣзку, представляющему ускореніе, умноженному на



Фиг. 107.

массу; поэтому, обозначивъ соответственно черезъ F_t , F_n , F_b проекціи силы F на касательную, главную нормаль и бинормаль, мы находимъ:

$$F_t = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}, \quad F_n = \frac{mv^2}{\rho}, \quad F_b = 0.$$

Эти три уравненія составляютъ систему, эквивалентную тремъ уравненіямъ движенія. Такъ какъ проекція F_n всегда имѣетъ положи-

тельное значение, а проекція F_b равна нулю, то сила всегда лежитъ въ соприкасающейся плоскости со стороны вогнутости кривой.

Если сила постоянно остается нормальной къ траекторіи, то $F_t = 0$, скорость остается постоянной, и сила измѣняется обратно пропорціонально радіусу кривизны.

Если сила постоянно касается траекторіи, то

$$F_n = m \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

а такъ какъ скорость v отлична отъ нуля, то радіусъ кривизны ρ есть безконечно большая величина, т. е. траекторіей служить прямая.

Теперь мы докажемъ теоремы, которыя во многихъ случаяхъ даютъ возможность найти первые интегралы.

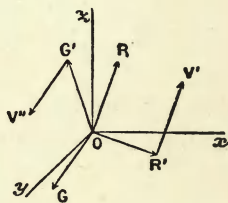
145. Количество движенія. — Количествомъ движенія точки M называется векторъ MQ , который имѣетъ такое же направление и обращенъ въ ту же сторону, что и скорость, при чемъ его длина равна произведенію mV изъ массы, на скорость. Такъ какъ проекціи скорости на три оси равны $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, то соотвѣтственные проекціи количества движенія равны

$$(MQ) \quad m \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{dz}{dt};$$

моменты же количества движенія около трехъ осей равны

$$(OG') \quad m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right), \quad m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right), \quad m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right),$$

такъ что моментомъ количества движенія около точки O служить



Фиг. 108.

векторъ OG' (фиг. 108), проекціи котораго равны тремъ предыдущимъ количествамъ.

146. Теорема о проекціи количества движенія. — Первое изъ уравненій движенія можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = X;$$

такъ какъ ось x -овъ можетъ быть выбрана произвольно, то это уравненіе выражаетъ, что производная по времени проекціи количества движенія на неподвижную ось равна суммѣ проекціи на эту же ось силъ, приложенныхъ къ движущейся точкѣ.

Въ частномъ случаѣ, когда сумма проекцій силъ на нѣкоторую ось постоянно равна нулю, эта теорема даетъ первый интеграль. Дѣйствительно, принявъ эту ось за ось Ox , мы имѣемъ

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = 0, \quad m \frac{dx}{dt} = A,$$

гдѣ постоянная A означаетъ проекцію на ось Ox начального количества движенія. Интегрируя вторично, мы получимъ

$$m x = At + A';$$

слѣдовательно, проекція движущейся точки на ось Ox совершаетъ въ этомъ случаѣ равномерное движеніе.

Примѣръ. Параллельныя силы. — Предположимъ, что сила F параллельна нѣкоторому постоянному направленію. Тогда траекторія находится въ плоскости, параллельной этому направленію. Для доказательства примемъ за ось Oz прямую, параллельную направленію результирующей F , такъ что все время $X=0$, $Y=0$. Слѣдовательно,

$$m \frac{dx}{dt} = A, \quad m \frac{dy}{dt} = B,$$

$$A dy - B dx = 0, \quad Ay - Bx = C;$$

мы получили уравненіе плоскости, параллельной оси Oz . Эта плоскость, въ которой происходитъ движеніе, опредѣляется начальными условіями: она есть плоскость, проведенная черезъ начальную скорость параллельно постоянному направленію силы.

Частный случай: прямолинейное движеніе. — Если въ послѣднемъ примѣрѣ начальная скорость равна нулю или параллель-

на постоянному направлѣнію силы, то мы можемъ считать очевиднымъ, что точка описываетъ прямую, параллельную силѣ, проходящей черезъ начальное положеніе M_0 . Въ этомъ можно убѣдиться аналитически: такъ какъ начальныя значенія производныхъ $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ равны нулю, то постоянныя A и B равны нулю, и мы имѣемъ

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0,$$

откуда, интегрируя, получимъ уравненія

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

прямой, параллельной оси Oz .

147. Теорема о моментѣ количества движенія. Начало площадей. — Изъ уравненій движенія можно также вывести теорему, аналогичную предыдущей, относительно моментовъ количествъ движенія. Два уравненія

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

мы соединяемъ въ уравненіе

$$x m \frac{d^2y}{dt^2} - y m \frac{d^2x}{dt^2} = xY - yX$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = xY - yX,$$

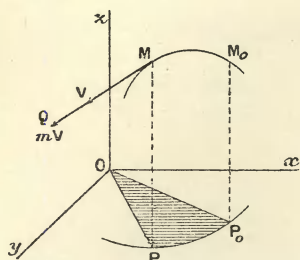
то есть:

производная по времени момента количества движенія около какой-нибудь оси (оси Oz) равна моменту результирующей силы около той же оси.

Эта теорема даетъ первый интегралъ уравненій движенія въ случаѣ, когда моментъ $xY - yX$ постоянно равенъ нулю, т. е. когда результирующій векторъ силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ, постоянно находится въ одной плоскости съ осью Oz . Это есть интегралъ

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C;$$

онъ имѣть весьма простой геометрическій смыслъ. Дѣйствительно, пусть P (фиг. 109) будетъ проекція движущейся точки M на пло-



Фиг. 109.

скость xu и P_0 — начальное положеніе этой проекціи; рассмотримъ секторъ, ограниченный проекціей траекторіи и двумя радіусами-векторами OP_0 и OP ; обозначая черезъ S площадь этого сектора, которая считается положительной въ сторону положительныхъ вращеній вокругъ оси Oz , мы имѣемъ

$$dS = \frac{1}{2} (x dy - y dx);$$

предыдущее уравненіе преобразуется въ

$$2 \frac{dS}{dt} = C,$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$S = \frac{1}{2} C(t - t_0);$$

иначе говоря, площадь S пропорціональна времени, въ теченіе котораго она описывается. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что теорема о площадяхъ имѣетъ мѣсто для проекціи движенія на плоскость xOy .

Входящая въ предыдущую формулу постоянная площадей C есть отношеніе удвоенной площади, описанной векторомъ OP , къ времени, въ теченіе котораго она была описана, и опредѣляется изъ начальныхъ условій движенія: она равна значенію, которое получаетъ выраженіе $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ въ началѣ движенія, т. е. равна моменту начальной скорости около оси Oz .

Обратно, если теорема площадей имѣетъ мѣсто для проекціи движенія на плоскость xOy вокругъ точки O , то сила находится въ одной плоскости съ осью Oz , потому что, дифференцируя уравненіе $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C$, мы получимъ

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

откуда

$$xY - yX = 0.$$

Примѣръ. Центральныя силы. — Предположимъ, что равнодѣйствующая F приложенныхъ къ точкѣ силъ есть центральная сила, т. е. ея направленіе проходитъ постоянно черезъ неподвижную точку O . Если примемъ эту точку за начало, то моментъ равнодѣйствующей F около каждой изъ трехъ координатныхъ осей равенъ нулю, и теорема площадей имѣетъ мѣсто для проекціи движенія на каждую изъ трехъ координатныхъ плоскостей. Траекторія лежитъ тогда въ плоскости, проходящей черезъ центръ силъ. Дѣйствительно, обозначивъ черезъ x' , y' , z' производныя координатъ x , y , z по времени t , мы будемъ имѣть три уравненія

$$xy' - yx' = C, \quad yz' - zy' = A, \quad zx' - xz' = B.$$

Умноживъ ихъ соотвѣтственно на z , x , y и сложивъ, мы получимъ

$$Ax + By + Cz = 0,$$

т. е. уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку O . Эта плоскость опредѣляется начальной скоростью и точкой O .

Частный случай: прямолинейное движеніе. — Если въ этомъ послѣднемъ примѣрѣ начальная скорость равна нулю или направлена по прямой OM_0 , соединяющей центръ силъ O съ начальнымъ положеніемъ M_0 , то движущаяся точка описываетъ прямую OM_0 .

Принимая во вниманіе симметрію, эту теорему можно считать очевидной; ее можно доказать аналитически, замѣчая, что постоянныя A , B , C , которыя вообще равны моментамъ начальной скорости около трехъ координатныхъ осей, здѣсь суть нули. Поэтому

$$yz' - zy' = 0, \quad zx' - xz' = 0, \quad xy' - yx' = 0.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ, что

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z};$$

поэтому, интегрируя и обозначая черезъ x_0, y_0, z_0 начальные координаты, получимъ:

$$L \frac{x}{x_0} = L \frac{y}{y_0} = L \frac{z}{z_0};$$

переходя отъ логарифмовъ къ числамъ, мы получимъ уравненія

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0},$$

прямой OM_0 .

148. Геометрическая интерпретація двухъ предыдущихъ теоремъ. — Черезъ начало O проведемъ векторъ OR , равный и параллельный равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, и векторъ OR' , равный и параллельный количеству движенія точки. Координаты точки R' равны

$$\alpha = mx', \quad \beta = my', \quad \gamma = mz'.$$

Уравненія движенія, выражающія теорему о проекціи количества движенія на каждую ось, можно будетъ написать такъ:

$$\frac{da}{dt} = X, \quad \frac{d\beta}{dt} = Y, \quad \frac{d\gamma}{dt} = Z;$$

эти уравненія выражаютъ, что скорость V' геометрической точки R' въ каждый моментъ равна и параллельна вектору R (фиг. 108), или также, что геометрическая производная вектора OR' по времени t геометрически равна вектору R .

Пусть точно такъ же OG будетъ моментъ около точки O равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ рассматриваемой точкѣ M , и OG' — моментъ количества движенія около той же точки. Координаты λ, μ, ν точки G' равны

$$(G') \quad \lambda = m(yz' - zy'), \quad \mu = m(zx' - xz'), \quad \nu = m(xy' - yx'),$$

а проекціи вектора OG равны

$$(G) \quad L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX.$$

Мы вывели (п. 147) уравнение $\frac{dv}{dt} = N$; такимъ же образомъ мы найдемъ, что

$$\frac{d\lambda}{dt} = L, \quad \frac{d\mu}{dt} = M;$$

эти уравненія выражаютъ, что точка G' обладаетъ въ каждый моментъ скоростью V'' , равной и параллельной моменту OG , т. е. геометрическая производная по t момента OG' геометрически равна моменту G .

Напримѣръ, если результирующий векторъ силъ, дѣйствующихъ на движущуюся точку, проходитъ черезъ неподвижную точку O , то количества λ , μ , ν постоянны, и векторъ OG' остается неподвижнымъ все время движенія. Мы видѣли, что траекторія будетъ въ этомъ случаѣ плоской; она лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ вектору OG' . Въ этомъ предположеніи теорема площадей имѣетъ мѣсто для проекціи движенія на любую плоскость, проходящую черезъ точку O ; постоянная площадей на этой плоскости есть проекція вектора OG' на нормаль къ плоскости.

149. Теорема живыхъ силъ. — Возвратимся къ уравненіямъ движенія

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

и сложимъ ихъ почленно, предварительно умноживъ ихъ соответственно на dx , dy , dz ; мы получимъ равенство

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz \right) = X dx + Y dy + Z dz;$$

такъ какъ квадратъ скорости равенъ

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

то мы можемъ написать полученное уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz. \quad (1)$$

Произведеніе изъ массы на квадратъ скорости mv^2 называется живой силой, а количество $\frac{mv^2}{2}$ называется кинети-

ческой энергіей; при помощи этихъ терминовъ написанное уравненіе выражается слѣдующимъ образомъ:

Дифференціалъ половины живой силы, или дифференціалъ кинетической энергіи, за промежутокъ времени dt равенъ элементарной работѣ за тотъ же промежутокъ времени равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Дѣйствительно, правая часть уравненія

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

есть элементарная работа силы X, Y, Z , соотвѣтствующая дѣйстви- тельному перемѣщенію dx, dy, dz , которому подверглась движу- щаяся точка за промежутокъ dt : какъ мы видѣли въ п. 70, работу равнодѣйствующей X, Y, Z силъ, приложенныхъ къ точкѣ, можно замѣнить суммой работъ составляющихъ силъ.

Уравненіе (1) вытекаетъ также непосредственно изъ перваго изъ внутреннихъ уравненій движенія

$$m \frac{dv}{dt} = F_t.$$

Дѣйствительно, умноживъ обѣ части его на ds и замѣнивъ $\frac{ds}{dt}$ на v , мы найдемъ, что

$$d \frac{mv^2}{2} = F_t ds;$$

правая часть этого уравненія выражаетъ элементарную работу силы F , соотвѣтствующую перемѣщенію ds .

Интегрируя уравненіе (1) отъ момента t_0 до t и обозначая черезъ v_0 скорость въ моментъ t_0 , мы получимъ уравненіе

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^t Xdx + Ydy + Zdz, \quad (2)$$

изъ котораго вытекаетъ слѣдующая теорема:

Приращеніе половины живой силы точки, или приращеніе ея кинетической энергіи, за какой-либо промежутокъ времени равно полной работѣ приложенныхъ къ точкѣ силъ за тотъ же промежутокъ времени.

Въ отношеніи вычисленія полной работы слѣдуетъ различать три случая, какъ мы показали во главѣ III, п. п. 73, 74, 75.

1° Въ самомъ общемъ случаѣ, когда проекціи X, Y, Z равнодѣйствующей зависятъ отъ $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t$, для вычисленія полной работы нужно знать выраженія координатъ x, y, z въ функціи отъ t , т. е. нужно знать движеніе.

2° Въ случаѣ, когда проекціи X, Y, Z зависятъ только отъ x, y, z , для вычисленія полной работы достаточно знать траекторію движущейся точки между положеніемъ M_0 , занимаемымъ ею въ моментъ t_0 , и положеніемъ ея M въ моментъ t .

3° Наконецъ, если равнодѣйствующая X, Y, Z зависитъ исключительно отъ положенія движущейся точки, и проекціи ея суть частныя производныя силовой функціи $U(x, y, z)$, такъ что

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU(x, y, z),$$

то для вычисленія полной работы достаточно знать только два положенія M_0 и M . Въ этомъ случаѣ теорема живыхъ силъ даетъ первый интегралъ; дѣйствительно, интегрируя правую часть уравненія (2), мы получимъ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)$$

или

$$mv^2 = 2[U(x, y, z) + h],$$

гдѣ h обозначаетъ произвольную постоянную $\frac{mv_0^2}{2} - U(x_0, y_0, z_0)$; послѣдняя называется постоянной живыхъ силъ. Это уравненіе показываетъ, что движущаяся точка получаетъ одну и ту же скорость всякій разъ, какъ функція $U(x, y, z)$ получаетъ одно и то же значеніе. Если $U(x, y, z)$ есть однозначная функція координатъ x, y, z , то можно сказать, что движущаяся точка получаетъ одну и ту же скорость всякій разъ, какъ она возвращается на одну и ту же поверхность уровня $U(x, y, z) = \text{const}$. Если же U есть многозначная функція, напримѣръ, $U(x, y, z) = \arctan \frac{y}{z}$, то скорость не должна непремѣнно получить одно и то же значеніе всякій разъ, какъ точка возвращается на ту же поверхность уровня, потому что на какой-либо опредѣленной поверхности уровня функція $U(x, y, z)$ и, слѣдовательно, полная работа получаетъ различныя значенія въ зависимости отъ пути, по которому совершается движеніе (см. п. 75, замѣчаніе).

Примѣры. — 1° Рассмотрим вполнѣ свободную тяжелую точку, движущуюся въ пустотѣ. Если мы направимъ ось Oz вертикально вверхъ, то единственной силой, приложенной къ точкѣ, будетъ вѣсъ, проекціи котораго равны

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-mg;$$

слѣдовательно, теорема живыхъ силъ даетъ

$$d \frac{mv^2}{2} = -mg \, dz;$$

правая часть этого равенства есть полный дифференціалъ; какъ мы уже нѣсколько разъ замѣтили, это показываетъ, что существуетъ силовая функція. Интегрируя, мы получимъ:

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = -g(z - z_0) \quad \text{или} \quad v^2 = 2(-gz + h).$$

Это уравненіе показываетъ, что скорость получаетъ одно и то же численное значеніе всякій разъ, какъ движущаяся точка достигаетъ одной и той же высоты, т. е. когда она возвращается къ одной и той же поверхности уровня, потому что въ данномъ случаѣ этими поверхностями служатъ горизонтальныя плоскости.

Въ болѣе общемъ случаѣ, когда на движущуюся точку дѣйствуетъ вертикальная сила, которая является функціей отъ z , такъ что

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=\varphi(z),$$

то

$$d \frac{mv^2}{2} = \varphi(z) \, dz, \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{z_0}^z \varphi(z) \, dz;$$

поверхностями уровня попрежнему будутъ горизонтальныя плоскости. Во всѣхъ этихъ движеніяхъ траекторія будетъ плоской кривой (п. 146, примѣръ).

2° Рассмотрим точку M , которая притягивается къ неподвижному центру O обратно пропорціонально квадрату разстоянія. Сила протяженія здѣсь выражается формулой вида $\frac{m\mu}{r^2}$, гдѣ μ есть постоянная и r есть разстояніе OM . Алгебраическое значеніе этой силы, отсчитываемое въ направленіи OM , равно $-\frac{m\mu}{r^2}$, а элементарная ра-

бота этой силы, согласно изложенному въ п. 77, 3^о, равна $-\frac{m\mu}{r^2}dr$. Теорема живыхъ силъ даетъ, слѣдовательно,

$$d \frac{mv^2}{2} = -\frac{m\mu}{r^2} dr, \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right),$$

или

$$v^2 = 2 \left(\frac{\mu}{r} + h \right).$$

Поверхностями уровня служатъ сферы $\frac{\mu}{r} = \text{const.}$; на одномъ и томъ же разстояніи отъ центра притяженія O скорость получаетъ одно и то же численное значеніе.

Вообще, если центральная сила, дѣйствующая на точку M , есть функція разстоянія r , алгебраическое значеніе которой, отсчитываемое въ направленіи OM , равно $\varphi(r)$, то

$$d \frac{mv^2}{2} = \varphi(r) dr, \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{r_0}^r \varphi(r) dr.$$

Поверхности уровня попрежнему суть сферы съ центромъ въ точкѣ O . Во всѣхъ такихъ движеніяхъ траекторія будетъ плоской кривой (п. 147, примѣръ).

150. Единицы живой силы. — Такъ какъ измѣненіе живой силы измѣняется работой, то живая сила и работа суть количества одинаковаго рода. Число, выражающее живую силу или кинетическую энергію, выражаетъ, слѣдовательно, единицы работы.

Въ системѣ абсолютныхъ единицъ С. Г. С. живая сила mv^2 выражается въ эргахъ; въ технической системѣ единицъ (метръ, секунда, килограммъ-сила) живая сила mv^2 выражается въ килограмм-метрахъ. Напримѣръ, если брошенное тѣло имѣетъ массу въ 20 *гр.* и скорость 10 *см.* въ секунду, то его живая сила mv^2 равна

$$20 \cdot 10^2 = 2000 \text{ эграмъ.}$$

Если пушечное ядро вѣсомъ въ 2 *кг.* имѣетъ скорость 500 *м.* въ секунду, то его масса въ системѣ метръ-секунда-килограммъ-сила равна

$$m = \frac{p}{g}, \quad m = \frac{2}{9,8},$$

а живая сила равна

$$\frac{2}{9,8} 500^2 = \text{приблизительно } 50\,000 \text{ кгм.},$$

гдѣ число 9,8 замѣняется числомъ 10.

II. — ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

151. Уравненія прямолинейнаго движенія. Простые случаи интегрируемости. — Остановимся на частномъ случаѣ, когда движеніе совершается по прямой линіи, и примемъ за ось Ox прямую, описываемую движущейся точкой; единственное уравненіе движенія напишется такъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X. \quad (1)$$

Въ самомъ общемъ случаѣ сила X есть функція отъ координаты x , скорости v и времени t ; въ этомъ случаѣ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \Phi \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right),$$

такъ какъ алгебраическое значеніе скорости v равно $\frac{dx}{dt}$. Это есть дифференціальное уравненіе второго порядка, которое даетъ возможность вычислить x въ функціи t . Общій интеграль

$$x = f(t, c, c').$$

содержитъ двѣ произвольныя постоянныя, которыя опредѣляются изъ начальныхъ условій

$$x_0 = f(t_0, c, c'), \quad v_0 = f'_t(t_0, c, c').$$

Можетъ случиться, что аналитическое выраженіе силы измѣняется въ зависимости отъ положенія движущейся точки или въ зависимости отъ того, въ какую сторону прямой обращена скорость.

Если сила X содержитъ только одно изъ количествъ x , v , t , то интегрированіе дифференціального уравненія (1) приводится къ квадратурамъ.

1° Сила зависитъ лишь отъ положенія точки. — Положимъ сначала

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x);$$

умноживъ обѣ части уравненія на $2 \frac{dx}{dt}$, мы получимъ

$$2m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} = 2\varphi(x) \frac{dx}{dt}$$

и, интегрируя, будемъ имѣть уравненіе

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2 \int_{x_0}^x \varphi(x) dx + h,$$

которое есть не что иное, какъ уравненіе живыхъ силъ, взятое для разсматриваемаго частнаго случая. Чтобы опредѣлить постоянную, возьмемъ $x = x_0$ и мы получимъ для постоянной h значеніе mv_0^2 . Выполнивъ вышеуказанную квадратуру, мы найдемъ уравненіе вида

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \psi(x), \quad \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\psi(x)};$$

въ выборѣ знака нѣтъ двойственности, такъ какъ при $x = x_0$ должно имѣть мѣсто равенство $\left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = v_0$; нужно, слѣдовательно, взять сначала передъ радикаломъ тотъ знакъ, какой имѣетъ начальная скорость v_0 ; если послѣдняя равна нулю, то движеніе происходитъ въ направленіи силы, и этимъ опять опредѣляется знакъ радикала. Итакъ, мы пишемъ

$$dt = \frac{dx}{\pm \sqrt{\psi(x)}}, \quad t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\psi(x)}};$$

будучи рѣшено относительно x , это уравненіе даетъ законъ пространства; оно непосредственно выражаетъ время, необходимое для того, чтобы пройти данное пространство.

2° Сила зависитъ лишь отъ скорости. — Предположимъ теперь, что X есть функція скорости v ; мы пишемъ

$$m \frac{dv}{dt} = \varphi(v), \quad dt = \frac{m dv}{\varphi(v)},$$

интегрированіе даетъ:

$$t = \int_{v_0}^v \frac{m dv}{\varphi(v)} + t_0,$$

считая время отъ момента начала движенія. Интегрируя вторично, получимъ

$$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t, \quad (3)$$

а такъ какъ $dx = v dt$, то

$$dx = \frac{mv dv}{\varphi(v)}, \quad x = \int_{v_0}^v \frac{mv dv}{\varphi(v)} + x_0.$$

Здѣсь величины x и t выражены въ функціи вспомогательной переменной v . Последнее уравненіе $mv dv = \mu(v) dx$ вытекаетъ также изъ теоремы живыхъ силъ, такъ какъ $\varphi(v) dx$ есть элементарная работа силы, и $mv dv = \frac{d(mv^2)}{2}$.

3° Сила зависитъ лишь отъ времени. — Наконецъ, если сила X есть функція только отъ времени, то

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = q(t).$$

Первое интегрированіе даетъ

$$m \frac{dx}{dt} = \int_{t_0}^t q(t) dt + mv_0;$$

интегрируя вновь, получимъ:

$$mx = \int_{t_0}^t dt \left[\int_{t_0}^t q(t) dt \right] + mv_0(t - t_0) + mx_0.$$

152. Приложенія къ движеніямъ, производимымъ силой, которая зависитъ лишь отъ положенія. — 1° Вертикальное движеніе тяжелаго тѣла въ пустотѣ. — Примемъ за ось вертикальную прямую, проходящую черезъ начальное положеніе движущейся точки и направленную вверхъ. Обозначимъ черезъ v_0 алгебраическое значеніе начальной скорости и предположимъ, что она направлена вертикально. Сила, дѣйствующая на движущуюся точку, постоянно равна — mg , и потому уравненіе движенія напишется такъ:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -g. \quad (1)$$

Первое интегрированіе приводитъ къ уравненію

$$\frac{dx}{dt} = v = -gt + v_0, \quad (2)$$

при условии, что абсциссы отсчитываются отъ начальнаго положенія движущейся точки. Если начальная скорость v_0 будетъ положительной, то скорость, вначалѣ положительная, постоянно уменьшается и по прошествіи времени $\frac{v_0}{g}$ становится равной нулю; начиная съ этого момента, скорость будетъ отрицательной, и абсолютное значеніе ея безпредѣльно возрастаетъ. Исключивъ время t изъ уравненій (2) и (3), мы найдемъ, что

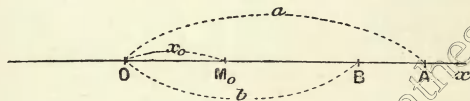
$$v^2 = v_0^2 - 2gx.$$

Это соотношеніе можно было бы получить, примѣняя теорему живыхъ силъ, т. е. умноживъ обѣ части уравненія (1) на $2 \frac{dx}{dt}$ и интегрируя. Мы имѣемъ, слѣдовательно:

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gx}.$$

Согласно нашему предположенію, $v_0 > 0$, т. е. тѣло вначалѣ было брошено вверхъ, и скорость его въ началѣ движенія была положительной; мы должны поэтому взять передъ радикаломъ знакъ $+$. Съ возрастаніемъ x до $\frac{v_0^2}{2g}$, скорость v уменьшается до нуля; начиная съ этого момента, тѣло падаетъ, и мы должны взять передъ радикаломъ знакъ $-$. Найденное нами выраженіе для скорости показываетъ, что скорость получаетъ одно и то же абсолютное значеніе всякій разъ, когда тѣло проходитъ черезъ опредѣленное положеніе какъ вверхъ, такъ и внизъ; оно проходитъ тогда черезъ одну и ту же поверхность уровня.

2° Движеніе матеріальной точки, притягиваемой къ неподвижному центру O или отталкиваемой отъ него съ силой, прямо пропорціональной разстоянію. — Возьмемъ на-



Фиг. 110.

чало въ точкѣ O (фиг. 110) и направимъ ось по прямой OM_0 , которая служитъ траекторіей; сторону OM_0 мы будемъ считать

положительной, при чемъ M_0 есть начальное положеніе; начальную скорость обозначимъ черезъ v_0 .

Притяженіе. — Разсмотримъ сначала случай притяженія. Сила въ какой-либо моментъ равна $-\mu x$, гдѣ μ положительное число; положивъ $\frac{\mu}{m} = k^2$, мы имѣемъ уравненіе движенія

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x. \quad (1)$$

Это уравненіе пригодно независимо отъ того, находится ли движущаяся точка справа или слѣва отъ центра притяженія O .

Уравненіе движенія можно получить прямо въ конечномъ видѣ, замѣчая, что дифференціальное уравненіе движенія

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

есть линейное уравненіе второго порядка съ постоянными коэффициентами — слѣдовательно, его общій интегралъ выразится черезъ

$$x = A \cos kt + B \sin kt;$$

дифференцируя, получимъ:

$$v = -Ak \sin kt + Bk \cos kt.$$

Для $t = 0$

$$x_0 = A, \quad v_0 = Bk,$$

поэтому

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Мы видимъ, что разсматриваемое движеніе есть простое колебательное, и что періодъ полного колебанія $T = \frac{2\pi}{k}$; замѣчательно, что этотъ періодъ не зависитъ отъ начальныхъ условий.

Если $v_0 = 0$, то предыдущее выраженіе приводится къ слѣдующему виду:

$$x = x_0 \cos kt;$$

начиная со значенія $t=0$, мы видимъ, что первое значеніе t , при которомъ x становится нулемъ, есть $\frac{\pi}{2k}$; слѣдовательно, время, по-

требуемое для того, чтобы движущаяся точка достигала начала, равно $T = \frac{\pi}{2k}$; это время не зависит отъ начального положенія.

Чтобы выразить это обстоятельство, движеніе называютъ таутохроннымъ.

Слѣдуя общему методу, можно прямо вычислить скорость въ функции отъ x : обѣ части уравненія движенія (1) умножаемъ на $2 \frac{dx}{dt}$ и интегрируемъ, что сводится къ примѣненію теоремы живыхъ силъ; мы получаемъ такимъ образомъ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = -k^2 x^2 + h.$$

Для $x = x_0$ мы имѣемъ $v = v_0$; слѣдовательно,

$$h = v_0^2 + k^2 x_0^2;$$

h есть, существенно, положительное количество, большее, чѣмъ $k^2 x_0^2$; мы можемъ поэтому положить $h = k^2 a^2$, гдѣ $a > x_0$. Уравненіе движенія теперь представится въ видѣ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2(a^2 - x^2), \quad \frac{dx}{dt} = \pm k\sqrt{a^2 - x^2},$$

мы имѣемъ, слѣдовательно, выраженіе скорости $v = \frac{dx}{dt}$ въ функции x . Передъ радикаломъ нужно взять знакъ $+$ или $-$ въ зависимости отъ того, движется ли точка въ положительную сторону оси Ox или въ отрицательную. Для того, чтобы скорость v имѣла вещественное значеніе, необходимо, чтобы значенія x заключались между $-a$ и $+a$; когда x возрастаетъ отъ $-a$ до $+a$, скорость v будетъ положительной; когда x убываетъ отъ $+a$ до $-a$, скорость v будетъ отрицательной; въ крайнихъ точкахъ $\pm a$ колебанія скорость равна нулю.

Отталкиваніе. — Въ случаѣ отталкивательной силы уравненіе движенія

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k^2x = 0$$

есть линейное уравненіе съ постоянными коэффициентами; оно имѣетъ общій интегралъ

$$x = Ae^{kt} + Be^{-kt},$$

откуда

$$v = Ake^{kt} - Bke^{-kt};$$

для $t=0$

$$x_0 = A + B, \quad \frac{v_0}{k} = A - B, \quad A = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{k} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0}{k} \right)^2.$$

$$x = x_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} + \frac{v_0}{k} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}.$$

Если бы начальныя условія были такими, что $A = 0$, т. е. $v_0 = -kx_0$, то движеніе выражалось бы уравненіемъ

$$x = x_0 e^{-kt},$$

и при безпредѣльномъ возрастаніи t координата x , а также скорость v стремилась бы къ нулю; движущаяся точка безпредѣльно приближалась бы съ безконечно убывающей скоростью къ отталкивающему центру O , никогда не достигая его.

Примѣняя къ нашему случаю теорему живыхъ силъ, мы получаемъ

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = k^2 x^2 + h.$$

гдѣ $h = v_0^2 - k^2 x_0^2$; поэтому

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{k^2 x^2 + h}.$$

Здѣсь нужно взять знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, въ какую сторону происходитъ движеніе. Изслѣдованіе можно сдѣлать; не интегрируя. Предположимъ сперва, что $x_0 > a$ и $v_0 > 0$; въ этомъ случаѣ движущаяся точка постоянно отдалается отъ центра отталкиванія, и ея скорость безпредѣльно возрастаетъ вмѣстѣ съ x .

Предположимъ затѣмъ, что $x_0 > 0$ и $v_0 < 0$; вначалѣ скорость меньше нуля, и передъ радикаломъ нужно поэтому взять знакъ $-$. Предположимъ, что $h > 0$; по мѣрѣ приближенія точки къ центру O , ея скорость убываетъ до $\sqrt{h}$; точка переходитъ съ этой скоростью черезъ центръ O и удаляется съ безпредѣльно возрастающей скоростью. Если $h < 0$, то можно положить $h = -k^2 a^2$, и тогда

$$\frac{dx}{dt} = -k \sqrt{x^2 - a^2},$$

гдѣ a должно быть меньше, чѣмъ x_0 , потому что при $x = x_0$ скорость v_0 имѣетъ вещественное значеніе; движущаяся точка прибли-

жается къ точкѣ A , имѣющей абсциссу a , и достигаетъ этой точки черезъ конечный промежутокъ времени, потому что время, которое требуется для того, чтобы пройти разстояніе $x_0 - x$,

$$t = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x \frac{-dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

стремится къ нѣкоторому предѣлу T , когда значеніе x стремится къ a ²¹⁾. Въ концѣ этого промежутка T скорость измѣняетъ знакъ, и точка безпредѣльно удаляется отъ точки $x=a$ съ постоянно возрастающей скоростью.

Въ промежуточномъ случаѣ, когда $h=0$ и $v_0 < 0$,

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{k^2 x^2} = -kx.$$

Скорость постоянно уменьшается по мѣрѣ приближенія точки къ началу; движущаяся точка безпредѣльно приближается къ точкѣ O , но не можетъ достигнуть ея въ конечное время, потому что время, которое требуется для того, чтобы достигнуть точки, отстоящей на разстояніе x отъ начала, равно

$$\frac{1}{k} \int_{x_0}^x \frac{-dx}{x} = \frac{1}{k} \log \frac{x_0}{x},$$

а это выраженіе возрастаетъ безпредѣльно, когда x стремится къ нулю. Точка O отличается той особенностью, что она представляетъ собой положеніе неустойчиваго равновѣсія; если помѣстить въ O точку безъ начальной скорости, то она остается въ покоѣ; но если немного отклонить ее, то вслѣдствіе отталкиванія она отклонится еще болѣе; чаще всего бываетъ, что движущаяся точка приближается къ положенію неустойчиваго равновѣсія съ скоростью, которая стремится къ нулю; тогда точка безпредѣльно приближается къ этому положенію, никогда не достигая его.

Численный примѣръ. — Предположимъ, что земля есть однородный шаръ, и вообразимъ, что черезъ нее вдоль діаметра проходитъ насквозь прямолинейный каналъ. Предположимъ, что въ этотъ каналъ падаетъ безъ начальной скорости тяжелая точка; требуется изучить ея движеніе, пренебрегая сопротивленіемъ воздуха.

Ось канала примемъ за ось x -овъ, а начало возьмемъ въ центрѣ O земли; въ теоріи притяженія доказывается, что сила, съ которой однородный шаръ притягиваетъ находящуюся внутри ея точку, направлена къ центру и пропорціональна разстоянію отъ центра. Такъ какъ тяжелая точка имѣетъ массу m и абсциссу x , то сила притяженія выразится черезъ $X = -\mu x$. Для опредѣленія постоянной μ замѣтимъ, что при устьѣ канала, на разстояніи $OA = R$ отъ центра, сила равна вѣсу mg . Слѣдовательно, $\mu R = mg$. Движеніе совершается по изложеннымъ выше законамъ. Постоянная k опредѣляется изъ соотношеній

$$k^2 = \frac{\mu}{m} = \frac{g}{R}.$$

Время T , которое требуется для того, чтобы точка достигла центра, равно $\frac{\pi}{2k}$, т. е. $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}$. Вычислимъ это время съ приближеніемъ, взявъ секунду за единицу времени и метръ за единицу длины. Имѣемъ

$$R = 6366000 \text{ м.}, \quad g = 9,808.$$

Примемъ $\frac{R}{g} = 640000$. Тогда $\sqrt{\frac{R}{g}} = 800$, и мы найдемъ для T значеніе $\pi \times 400$, т. е. около 1200 секундъ или 20 минутъ. Движущаяся точка достигнетъ центра со скоростью

$$V = kx_0 = \sqrt{gR} = 8000 \text{ м.}$$

въ секунду.

3° Точка, притягиваемая съ силой, обратно пропорціо-
нальной квадрату разстоянія. — Пусть O будетъ центръ притяженія и x абсцисса движущейся точки M ; мы предполагаемъ, что абсцисса будетъ положительной; алгебраическое значеніе x силы притяженія равно $-\frac{\mu}{x^2}$, гдѣ μ обозначаетъ постоянную, равную напряженію силы притяженія на разстояніи единицы. Слѣдовательно,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^2},$$

есть уравненіе движенія. Умноживъ на $2 \frac{dx}{dt}$ и проинтегрировавъ, мы получимъ интеграль живыхъ силъ

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2\mu}{x} + h, \quad (1)$$

гдѣ постоянная h имѣетъ значеніе

$$h = mv_0^2 - \frac{2\mu}{x_0},$$

а x_0 и v_0 обозначаютъ начальную абсциссу и начальную скорость. Отсюда выводимъ уравненіе

$$\sqrt{m} \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2\mu}{x} + h} \quad (2)$$

для опредѣленія скорости, при чемъ нужно взять знакъ $+$ или $-$ въ зависимости отъ того, въ какую сторону перемѣщается движущаяся точка. Мы имѣемъ затѣмъ

$$t - t_0 = \sqrt{m} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2\mu}{x} + h}};$$

интегрированіе легко выполнить элементарными методами при помощи подстановки

$$\frac{2\mu}{x} + h = u^2,$$

которая приводитъ къ интегрированію рациональнаго дифференціала ²²⁾. Но для того, чтобы уяснить себѣ качественныя условія движенія, удобнѣе будетъ сдѣлать изслѣдованіе, не производя интегрированія.

Первый случай. — Предположимъ, что движущаяся точка брошена по направленію къ центру притяженія O или пущена безъ начальной скорости, т. е. что $v_0 \leq 0$. Ясно, что движущаяся точка направляется къ центру O ; x уменьшается, скорость

$$v = - \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{2\mu}{x} + h}$$

возрастает по своей абсолютной величинѣ, и точка падаетъ въ центръ притяженія съ безпредѣльно возрастающей скоростью. Для $x=0$ математическое выраженіе скорости обращается въ безконечность, но этому обстоятельству не соответствуетъ никакая физическая реальность, потому что лишь въ абстракціи центръ притяженія можетъ быть сведенъ къ одной точкѣ.

Второй случай. — Движущаяся точка брошена изъ начальнаго положенія M_0 такъ, что она удаляется отъ центра притяженія, т. е. $v_0 > 0$. Въ этомъ случаѣ скорость, которая измѣняется непрерывно, вначалѣ будетъ положительной:

$$v = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{2\mu}{x} + h}.$$

Движущаяся точка удаляется отъ центра O , x возрастаетъ, v уменьшается. Характеръ движенія зависитъ отъ знака постоянной h .

а. $h > 0$. Скорость въ этомъ случаѣ убываетъ, но стремится къ $\sqrt{h}$; движущаяся точка безпредѣльно удаляется, и ея движеніе стремится стать равномернымъ.

б. $h = 0$. Скорость убываетъ и стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи x ; движущаяся точка безпредѣльно удаляется, но со скоростью, которая стремится къ нулю.

γ. $h < 0$. Положимъ $h = -\frac{\mu}{a}$, гдѣ a есть положительное число. Тогда

$$v = \sqrt{m} \sqrt{\frac{2\mu}{x} - \frac{\mu}{a}}; \quad (3)$$

x_0 меньше, чѣмъ $2a$, такъ какъ при $x=x_0$ скорость v получаетъ данное вещественное значеніе v_0 ; x возрастаетъ, v убываетъ и стремится къ нулю съ приближеніемъ x къ $2a$. Движущаяся точка прибываетъ въ точку A , расположенную на разстояніи $x=2a$, черезъ конечный промежутокъ времени, такъ какъ интегралъ, дающій время t , остается конечнымъ для значенія $x=2a$. Скорость въ точкѣ A равна нулю, такъ что движущаяся точка находится въ такихъ же самыхъ условіяхъ, въ какихъ она была бы, находясь вначалѣ въ A безъ начальной скорости; она падаетъ обратно въ центръ притяженія, какъ въ первомъ случаѣ, и, начиная съ этого момента, передъ радикаломъ въ выраженіи (3) скорости нужно взять знакъ минусъ.

Численный примѣръ. — Тяжелая точка, имѣющая массу m и находящаяся на высотѣ радіуса земли R надъ поверхностью земли, которая разсматривается, какъ неподвижный шаръ, падаетъ безъ начальной скорости. Найти время T , черезъ которое точка упадетъ на поверхность земли, и скорость ея V въ моментъ, когда она коснется земли. Извѣстно, что земля притягиваетъ лежащую внѣ ея точку съ силой, обратно пропорціональной квадрату разстоянія отъ центра O . Принявъ за ось x -овъ прямую OM_0 , проходящую черезъ начальное положеніе, мы имѣемъ

$$OM_0 = x_0 = 2R, \quad v_0 = 0;$$

сила X , дѣйствующая въ точкѣ M на разстояніи x отъ центра, равна $-\frac{\mu}{x^2}$; на поверхности земли $x=R$ и сила притяженія совпадаетъ съ вѣсомъ, поэтому $\frac{\mu}{R^2} = mg$ и $\mu = mgR^2$. Слѣдовательно, теперь

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgR^2}{x^2}$$

есть уравненіе движенія. Раздѣливъ на m , умноживъ на $2 \frac{dx}{dt}$ и проинтегрировавъ, мы получимъ уравненіе живой силы

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2gR^2}{x} + h. \quad (4)$$

По условію, скорость равна нулю при $x = 2R$; постоянная h равна, слѣдовательно, $-gR$, и

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{gR} \sqrt{\frac{2R}{x} - 1},$$

гдѣ слѣдуетъ взять знакъ минусъ, потому что движущаяся точка падаетъ по направленію къ центру O . Когда она коснется земли, $x=R$ и абсолютная величина скорости будетъ

$$V = \sqrt{gR};$$

въ метрахъ и секундахъ $g=9,8$ и $R=6366000$; скорость V составляетъ около 8000 м. въ секунду. Что касается времени паденія T ,

то оно получится, если мы опредѣлимъ dt изъ уравненія (4) и проинтегрируемъ по x въ предѣлахъ отъ $2R$ до R . Мы получимъ

$$T = \frac{1}{\sqrt{gR}} \int_R^{2R} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2R}{x} - 1}},$$

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{640000} \frac{5}{2}.$$

$$T = 2000 \text{ сек.} = 33 \text{ мин.}$$

153. Сила, зависящая лишь отъ скорости. Вертикальное паденіе тѣлъ, брошенныхъ въ сопротивляющейся средѣ. —

До сихъ поръ мы разсматривали примѣры, въ которыхъ сила зависитъ только отъ положенія точки. Вотъ рядъ вопросовъ, въ которыхъ разсматриваемая матеріальная точка находится подъ дѣйствіемъ силы, зависящей отъ скорости. Представимъ себѣ тяжелое тѣло, которое движется въ сопротивляющейся средѣ, на примѣръ, въ воздухѣ. Среда производитъ на каждый элементъ поверхности тѣла опредѣленное дѣйствіе, и всѣ эти дѣйствія слагаются въ одну силу и одну пару, приложенныя къ тѣлу. Когда, въ частномъ случаѣ, снарядъ представляетъ собой тѣло вращенія и движется поступательно параллельно оси вращенія, то ясно, что въ силу симметріи пара равна нулю, а результирующая дѣйствій среды на элементы поверхности тѣла есть сила, направленная по оси въ сторону, противоположную движенію. Это послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто, на примѣръ, когда въ неподвижномъ воздухѣ даютъ падать шару или цилиндрически-коническому снаряду съ вертикальной осью.

Обратимся къ этому частному случаю. По теоремѣ, которая будетъ доказана позже, движеніе центра тяжести будетъ такимъ, какимъ оно было бы, если бы вся масса тѣла была сосредоточена въ центрѣ тяжести и всѣ приложенныя къ тѣлу внѣшнія силы были перенесены въ эту точку параллельно самимъ себѣ. Центръ тяжести движется, слѣдовательно, какъ тяжелая точка, на которую дѣйствуетъ вертикальная сила R , направленная въ сторону, противоположную скорости. Вопросъ сводится, такимъ образомъ, къ изученію движенія матеріальной точки, которая находится подъ дѣйствіемъ своего вѣса и стѣснена въ своемъ движеніи сопротивленіемъ R . Опытъ пока-

заль, что въ случаѣ очень малыхъ скоростей сопротивление можно безъ замѣтной погрѣшности считать пропорціональнымъ скорости v ; если скорость довольно велика, но меньше 200 м. въ секунду, то сопротивление пропорціонально квадрату скорости v^2 ; при болѣе высокихъ скоростяхъ нужно вводить третью или четвертую степень скорости. Повидимому, законъ сопротивленія не можетъ быть представленъ при помощи простой формулы; Сіачи (Siacci) предложилъ формулу, которая замѣчательнымъ образомъ согласуется съ результатами опытовъ (эта формула разобрана Шапелемъ (Chapel) въ *Revue d'Artillerie*, т. XLVIII, апрѣль - сентябрь 1896 г.). Мы остановимся на общемъ допущеніи, а именно, предположимъ, что сопротивление дано въ функціи скорости формулой

$$R = mg \varphi(v),$$

гдѣ $\varphi(v)$ есть положительная функція, возрастающая вмѣстѣ съ v . Такъ какъ тѣло, предоставленное самому себѣ безъ начальной скорости, падаетъ, то сопротивление при $v=0$ меньше вѣса, и, слѣдовательно $\varphi(0) < 1$. Предположимъ, кромѣ того, что, для всякаго положительнаго значенія перемѣнной, функція $\varphi(v)$ имѣетъ положительную производную, отличную отъ нуля. Пусть λ будетъ частное значеніе v , для котораго сопротивление равно вѣсу, т. е. для котораго $\varphi(\lambda) = 1$.

1° Нисходящее движеніе. — Предположимъ, что точка движется внизъ; возьмемъ начало въ начальномъ положеніи движущейся точки и направимъ ось вертикально книзу. Уравненіе движенія будетъ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - R = mg - mg \varphi(v),$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g[1 - \varphi(v)];$$

такъ какъ $\varphi(\lambda) = 1$, то мы можемъ привести уравненіе къ слѣдующему виду:

$$\frac{dv}{dt} = g[\varphi(\lambda) - \varphi(v)], \quad (1)$$

откуда мы при помощи квадратуры найдемъ время въ функціи скорости:

$$gt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\varphi(\lambda) - \varphi(v)}; \quad (2)$$

подставивъ въ равенство (1) $\frac{dx}{v}$ вмѣсто dt , мы получимъ

$$g dx = \frac{v dv}{\varphi(\lambda) - \varphi(v)},$$

и пространство x также выразится въ функции v посредствомъ квадратуры

$$gx = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{\varphi(\lambda) - \varphi(v)}. \quad (3)$$

Формула (1) показываетъ, что производная $\frac{dv}{dt}$ имѣетъ такой же знакъ, какъ и выраженіе $\varphi(\lambda) - \varphi(v)$. Предположимъ, что начальная скорость, которая либо имѣетъ положительное значеніе, либо равна нулю, будетъ меньше, чѣмъ λ ; въ такомъ случаѣ $\frac{dv}{dt}$ вначалѣ имѣетъ положительное значеніе, и скорость v возрастаетъ съ временемъ отъ своего начальнаго значенія v_0 ; скорость будетъ возрастать, пока выраженіе $\varphi(\lambda) - \varphi(v)$ будетъ положительнымъ, т. е. до тѣхъ поръ, пока скорость v не станетъ равной λ . Мы докажемъ, что скорость v не можетъ стать равной λ за конечное время. Дѣйствительно, въ уравненіи (2) дифференціальный элементъ $\frac{dv}{\varphi(\lambda) - \varphi(v)}$ становится безконечнымъ, когда $v = \lambda$, и при томъ такимъ образомъ, что выраженіе $\frac{1}{\varphi(\lambda) - \varphi(v)} (\lambda - v)$ стремится къ предѣлу $\frac{1}{\varphi'(\lambda)}$; слѣдовательно, интегралъ вообще обращается въ безконечность при $v = \lambda$; точно такъ же уравненіе (3) показываетъ, что и x обращается въ безконечность при этомъ значеніи v ; отсюда слѣдуетъ, что скорость постоянно возрастаетъ, но стремится къ конечному предѣлу λ .

Если начальная скорость v_0 больше, чѣмъ λ , то вначалѣ производная $\frac{dv}{dt}$ будетъ отрицательной, и скорость, убывая, будетъ приближаться къ λ ; можно сказать, какъ въ предыдущемъ случаѣ, что t и x безпредѣльно возрастаютъ, когда v стремится къ λ .

Итакъ, скорость стремится къ одному и тому же предѣлу λ , какова бы ни была начальная скорость, и по истеченіи достаточно продолжительнаго времени движеніе можно будетъ считать безъ замѣтной погрѣшности равномернымъ и имѣющимъ скорость λ . Отсюда слѣдуетъ, что въ случаѣ, когда начальная скорость какъ разъ

равна λ , движение будетъ въ точности равномернымъ; это видно и изъ дифференціального уравненія (1), которое допускаетъ рѣшеніе $v = \lambda$.

Предположимъ, что въ воздухѣ даютъ падать двумъ равнымъ однороднымъ шарамъ, имѣющимъ различныя массы; при равныхъ скоростяхъ сопротивленіе воздуха будетъ одинаковымъ для обоихъ шаровъ; мы имѣемъ, слѣдовательно:

$$mg\varphi(v) = m_1g\varphi_1(v). \quad (4)$$

Назовемъ черезъ λ и λ_1 предѣльныя скорости двухъ шаровъ, опредѣляемыя уравненіями $\varphi(\lambda) = 1$ и $\varphi_1(\lambda) = 1$. Легко видѣть, что если $m_1 > m$, то $\lambda_1 > \lambda$. Дѣйствительно, полагая въ уравненіи (4) $v = \lambda$, мы найдемъ, что

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{m}{m_1}.$$

Слѣдовательно, $\varphi_1(\lambda)$ меньше 1, и такъ какъ функція φ_1 возрастаетъ вмѣстѣ съ независимой переменною, то $\lambda_1 > \lambda$; это доказываетъ, что болѣею массѣ соотвѣтствуетъ болѣею предѣльная скорость, — результатъ, согласный съ опытомъ; дѣйствительно, изъ опыта мы знаемъ, что тѣла болѣе тяжелыя быстрѣ падаютъ въ воздухѣ.

Въ видѣ упражненія можно предположить, что

$$g\varphi(v) = kv^n, \quad g = k\lambda^n.$$

Если n есть цѣлое число, то въ квадратурахъ, которыя нужно выполнить, подынтегральныя функціи будутъ раціональными дробями; если же n есть раціональная дробь, $n = \frac{p}{q}$, то посредствомъ подстановки $v = u^q$ мы опять придемъ къ раціональнымъ дифференціаламъ.

Положимъ, на примѣръ, $n = 1$; уравненіе (2) интегрируется непосредственно и даетъ

$$kt = \log \frac{\lambda - v_0}{\lambda - v};$$

слѣдовательно, первый интегралъ будетъ

$$\lambda - v = (\lambda - v_0)e^{-kt};$$

мы вновь получаемъ здѣсь результаты, уже извѣстные намъ изъ изслѣдованія общаго случая: разность $\lambda - v$ всегда имѣетъ тотъ же знакъ, что и $\lambda - v_0$; при безпредѣльномъ возрастаніи t показатель-

ная функція стремится къ нулю, и скорость v стремится къ предѣлу λ . Последнее уравненіе легко интегрировать, замѣняя v черезъ $\frac{dx}{dt}$, при чемъ получается

$$\lambda t - x = -\frac{1}{k}(\lambda - v_0)e^{-kt} + C.$$

Такъ какъ $x = 0$ при $t = 0$, то постоянная C равна $\frac{\lambda - v_0}{k}$.

Подставивъ вмѣсто λ значеніе $\frac{g}{k}$, мы получимъ такимъ образомъ x въ функціи времени:

$$x = \frac{g}{k} \left(t - \frac{1 - e^{-kt}}{k} \right) + v_0 \frac{1 - e^{-kt}}{k}.$$

Покажемъ, что, при приближеніи k къ предѣлу нуль, уравненіе, которымъ опредѣляется x , приводится къ уравненію $x = v_0 + \frac{1}{2}gt^2$, выражающему свободное паденіе въ пустотѣ. Дѣйствительно, если мы въ предыдущей формулѣ разложимъ e^{-kt} въ рядъ, то будемъ имѣть

$$x = g \left[\frac{t^2}{1.2} - k \left(\frac{t^3}{1.2.3} + \dots \right) \right] + v_0 \left[t - k \left(\frac{t^2}{1.2} + \dots \right) \right];$$

и если мы теперь положимъ $k = 0$, то получимъ

$$v = v_0 + \frac{1}{2}gt^2.$$

2° Восходящее движеніе. — Направимъ теперь ось Ox вертикально вверхъ. По прежнему,

$$R = mg \varphi(v).$$

и уравненіе движенія будетъ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - mg \varphi(v),$$

т. е.

$$\frac{dv}{dt} = -g[1 + \varphi(v)],$$

откуда, какъ и выше, найдемъ, что

$$gt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 + \varphi(v)}, \quad gx = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{1 + \varphi(v)}.$$

Въ этомъ случаѣ производная $\frac{dv}{dt}$ всегда будетъ отрицательной; слѣдовательно, скорость постоянно убываетъ. Она обращается въ нуль черезъ конечный промежутокъ времени

$$T = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^0 \frac{dv}{1 + \varphi(v)},$$

и наибольшая высота, до которой можетъ подняться движущаяся точка, равна

$$H = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^0 \frac{v dv}{1 + \varphi(v)};$$

если бы функція $\varphi(v)$ была равна нулю, то получились бы формулы движенія въ пустотѣ

$$T_1 = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^0 dv, \quad H_1 = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^0 v dv.$$

Когда функція $\varphi(v)$ не равна нулю, то она будетъ положительной; поэтому элементы интеграла H всегда меньше соотвѣтственныхъ элементовъ интеграла H_1 , вслѣдствіе чего высота H меньше, чѣмъ H_1 : точка въ воздухѣ подымается на меньшую высоту, чѣмъ въ пустотѣ. Мы видимъ также, что время T меньше, чѣмъ T_1 : движущаяся точка достигаетъ наибольшей высоты черезъ болѣе короткое время, чѣмъ при движеніи въ пустотѣ.

По истеченіи времени T движущаяся точка останавливается и затѣмъ падаетъ обратно внизъ, слѣдуя изложеннымъ уже законамъ паденія безъ начальной скорости. Когда точка будетъ вновь проходить черезъ свое начальное положеніе, ея скорость будетъ меньше, чѣмъ v_0 . Дѣйствительно, она поднялась менѣе высоко, чѣмъ въ случаѣ, если бы она была брошена съ той же начальной скоростью въ пустотѣ; сверхъ того, она падала обратно менѣе быстро, какъ-будто находясь подъ защитою воздуха; по этимъ двумъ причинамъ скорость при возвращеніи будетъ меньше той, которая соотвѣтствовала бы движенію въ пустотѣ, т. е. меньше, чѣмъ v_0 .

Если предположимъ опять, что $g\varphi(v) = kv^n$, то для случая $n=1$ мы легко можемъ выполнить интегрирование

$$kt = - \int_{v_0}^v \frac{k dv}{g + kv} = - \text{Log} \frac{g - kv}{g + kv_0};$$

переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, мы получимъ

$$(c) \quad g + kv = (g + kv_0)e^{-kt};$$

наибольшей высоты точка достигнетъ по истеченіи времени

$$T = \frac{1}{k} \text{Log} \left[1 + \frac{k}{g} v_0 \right].$$

Подставивъ $\frac{dx}{dt}$ вмѣсто v въ уравненіе (c) и проинтегрировавъ, мы получимъ

$$gt + kx = (g + kv_0) \frac{1 - e^{-kt}}{k};$$

если k стремится къ нулю, то получается формула движенія въ пустотѣ.

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

154. Данъ законъ прямолинейнаго движенія, требуется найти силу. — Эта задача либо будетъ опредѣленной, либо не будетъ опредѣленной, смотря по тому, задается ли общій законъ прямолинейнаго движенія такъ, что въ задаваемую функцію входятъ двѣ произвольныя постоянныя²³⁾ или же задается только частное движеніе.

Предположимъ, что дано

$$x = \varphi(t, x_0, v_0), \quad (1)$$

гдѣ x_0 есть начальное положеніе движущейся точки для $t=0$ и v_0 — ея начальная скорость. Требуется найти законъ силы, которая могла бы сообщить заданное движеніе точкѣ, поставленной въ произвольное положеніе x_0 и имѣющей скорость v_0 . Эта задача — опредѣленная. Мы имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t, x_0, v_0), \\ X = m \frac{d^2x}{dt^2} &= m \varphi''(t, x_0, v_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Рѣшивъ уравненія (1) и (2) относительно x_0 и v_0 и подставивъ рѣшенія въ выраженіе для X , мы найдемъ искомый законъ

$$X = \Phi \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right).$$

Примѣръ. — Если заданное движеніе опредѣляется формулой

$$x^2 = \frac{\mu t^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)^2,$$

то мы найдемъ ²⁴⁾, что

$$X = \frac{m\mu}{x^3}.$$

Если же задается только частный случай движенія безъ произвольныхъ постоянныхъ или съ одной только произвольной постоянной, то задача будетъ неопредѣленной. Предположимъ, напри-
мѣръ, что произвольныхъ постоянныхъ нѣтъ совсѣмъ и что дано

$$x = \varphi(t); \quad (3)$$

мы получимъ

$$v = \varphi'(t), \quad X = m\varphi''(t).$$

При помощи этихъ уравненій можно будетъ выразить X черезъ x , v , t безчисленнымъ множествомъ способовъ; такимъ образомъ, мы будемъ имѣть безчисленное множество законовъ силы, которыя могутъ произвести данное частное движеніе.

Вопросъ можно было бы сдѣлать опредѣленнымъ, если бы мы напередъ подчинили силу X извѣстнымъ условіямъ; такъ, если бы мы подчинили силу X условію, согласно которому она должна зависѣть только отъ положенія x , то мы имѣли бы опредѣленную задачу, потому что мы должны были бы изъ уравненія движенія (3) опредѣлить t и подставить въ выраженіе для силы X . Точно такъ же задача была бы опредѣленной, если бы сила X должна была зависѣть только отъ скорости v или отъ времени t .

Примѣръ. — Пусть будетъ $x = \sin t$; для $t=0$ имѣемъ $x_0=0$, $v_0=1$. Это уравненіе даетъ

$$v = \cos t, \quad X = -m \sin t.$$

Для силъ X мы имѣли бы слѣдующія выраженія :

$$(\alpha) -m \sin t, \quad (\beta) -m \sqrt{1-v^2}, \quad (\gamma) -mx, \quad (\delta) -\frac{m}{2}(x + \sin t), \dots,$$

при чемъ мы можемъ разнообразить эти сочетанія до бесконечности. Если опредѣлить наиболѣе общее движеніе, порождаемое одной изъ этихъ силъ, то найдутся весьма различныя движенія, которыя для частныхъ начальныхъ условій $x_0=0$, $v_0=1$ всѣ даютъ заданное движеніе $x=\sin t$. Напримѣръ, для первыхъ четырехъ выражений силъ мы найдемъ ²⁵⁾ слѣдующія выраженія :

$$(\alpha) \quad x = \sin t + Ct + C',$$

$$(\beta) \quad x = \sin(t + C) + C',$$

$$(\gamma) \quad x = C \cos t + C' \sin t,$$

$$(\delta) \quad x = C \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + C' \sin \frac{t}{\sqrt{2}} + \sin t$$

всѣ они при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ C и C' приводятся къ виду $x=\sin t$.

III. — КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ ВЪ ПУСТОТѢ И ВЪ СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДѢ.

155. Сила постояннаго направленія. — Предположимъ, что сила, дѣйствующая на движущуюся точку, постоянно параллельна нѣкоторому неизмѣнному направленію; въ такомъ случаѣ траекторія лежитъ въ плоскости, содержащей начальную скорость и направленіе силы. Это доказано выше (п. 146, примѣръ); плоскость траекторіи мы примемъ за плоскость xOy и направимъ ось Oy параллельно силѣ. Тогда уравненія

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

будутъ уравненіями движенія; первое изъ нихъ даетъ

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x = at + b,$$

т. е. проекція движущейся точки на ось Ox обладает равномерным движениемъ. Значенія постоянныхъ a и b опредѣляются изъ начальныхъ условий: нужно написать, что $x = x_0$ и $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = x'_0$ при $t = t_0$. Въ самомъ общемъ случаѣ второе уравненіе имѣетъ слѣдующій видъ:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \Phi \left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, t \right).$$

Если вмѣсто x поставимъ $at + b$, то уравненіе приметъ видъ

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \Psi \left(y, \frac{dy}{dt}, t \right);$$

это уравненіе такого же вида, какъ и то, которое получается въ случаѣ прямолинейнаго движенія; если мы сумѣемъ выполнить интегрированіе, то задача будетъ рѣшена вполне.

156. Тяжелая точка въ пустотѣ. — Возьмемъ начало координатъ въ начальномъ положеніи движущейся точки, ось y -овъ направимъ вертикально кверху, а ось x -овъ по горизонтальной прямой въ плоскости траекторіи; уравненія движенія выразятся такъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg;$$

если обозначить черезъ α уголъ начальной скорости v_0 съ осью Ox и пользоваться Лагранжевыми обозначеніями производныхъ, то первое уравненіе дастъ

$$x' = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad (2)$$

второе уравненіе тоже интегрируется непосредственно и даетъ

$$y' = -gt + v_0 \sin \alpha, \quad (1')$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha. \quad (2')$$

Уравненія (1) и (1') даютъ квадратъ скорости $x'^2 + y'^2$:

$$v^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2 = v_0^2 - 2gy; \quad (3)$$

численное значеніе скорости въ любой моментъ будетъ такимъ же, какъ если бы тѣло падало безъ начальной скорости изъ точки,

ордината которой равна $\frac{v_0^2}{2g}$. Эта формула, дающая скорость, вытекает непосредственно из теоремы живыхъ силъ.

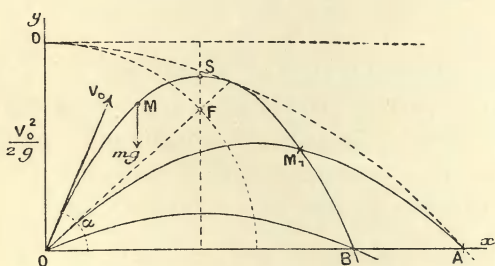
Исключивъ изъ уравненій (2) и (2') время, мы получимъ уравненіе траекторіи

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha. \quad (4)$$

Это есть парабола съ вертикальной осью, обращенная вогнутостью книзу, такъ какъ коэффициентъ при x^2 имѣетъ отрицательное значеніе.

Если бы уголъ α былъ отрицательнымъ, то, согласно уравненію (1') производная $\frac{dy}{dt}$ была бы всегда отрицательной; ордината y постоянно убывала бы, и движущаяся точка не прошла бы черезъ вершину параболы (фиг. 111).

Предположимъ теперь, что $\alpha > 0$; производная y' вначалѣ имѣетъ положительное значеніе, и движущаяся точка поднимается;



Фиг. 111.

она поднимается до тѣхъ поръ, пока производная y' не обратится въ нуль; это произойдетъ по истеченіи времени t_1 , опредѣляемого уравненіемъ

$$-gt_1 + v_0 \sin \alpha = 0.$$

Когда движущаяся точка достигнетъ наибольшей высоты, скорость ея, въ силу соотношенія (3), будетъ наименьшей. Координаты (a, b) самой высокой точки S , вершины параболы, получатся путемъ подстановки t_1 вмѣсто t :

$$a = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad b = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Послѣ этого момента t_1 производная y' становится отрицательной, и движущаяся точка опускается. При вторичномъ прохожденіи падающей точки черезъ мѣсто, находящееся на опредѣленной высотѣ, скорость точки получаетъ прежнее численное значеніе. Въ частности, черезъ точку B на уровнѣ начала O движущаяся точка проходитъ со скоростью v_0 . Дальность полета OB равна удвоенной абсциссѣ a вершины. При данной начальной скорости дальность полета OB имѣетъ наибольшее возможное значеніе, когда $\sin 2\alpha$ достигаетъ максимума, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Замѣчаніе. — Нетрудно убѣдиться въ томъ, что для всѣхъ параболъ, получаемыхъ при измѣненіи угла α и при постоянномъ значеніи начальной скорости v_0 , директрисой служить прямая D

$$y = \frac{v_0^2}{2g},$$

лежащая на той высотѣ, до которой поднялась бы движущаяся точка, если бы она была брошена вертикально вверхъ со скоростью v_0 ²⁷⁾; въ этомъ послѣднемъ случаѣ парабола будетъ безконечно сплющена.

Парабола безопасности. Упражненіе. — Подъ какимъ угломъ слѣдуетъ бросить снарядъ для того, чтобы попасть въ данную точку $M_1(x_1, y_1)$ плоскости? Положивъ $\tan \alpha = u$ и выразивъ, что траекторія проходитъ черезъ точку (x_1, y_1) , мы будемъ имѣть для опредѣленія u уравненіе второй степени.

$$y_1 = -\frac{gx_1^2}{2v_0^2}(1+u^2) + ux_1.$$

Условіе вещественности корней уравненія выражаетъ, что точка M_1 должна лежать внутри или на параболѣ (такъ называемой параболѣ безопасности), имѣющей уравненіе

$$\frac{v_0^2}{2g} - y - \frac{g}{2v_0^2}x^2 = 0. \quad (5)$$

На фиг. 111 эта парабола изображена пунктиромъ.

Если точка M_1 лежитъ внутри параболы безопасности, то уравненіе, изъ котораго опредѣляется u , имѣетъ два вещественныхъ неравныхъ корня, и снарядъ можетъ попасть въ точку M_1 , двигаясь по двумъ различнымъ параболамъ, соответствующимъ двумъ различнымъ угламъ прицѣла. Если точка M_1 лежитъ на параболѣ безопасности, то уравненіе даетъ для u два равныхъ вещественныхъ

корня, и снарядъ можетъ достигнуть точки M_1 по одной лишь траекторіи.

Парабола безопасности есть огибающая траекторій, которыя мы получимъ, давая различныя значенія углу α , т. е. перемѣнной u . — Дѣйствительно, для того, чтобы найти огибающую кривыхъ, представленныхъ уравненіемъ (4), въ которомъ $u = \tan \alpha$ есть перемѣнный параметръ, достаточно выразить, что это уравненіе, рассматриваемое относительно u , допускаетъ двойной корень. Но именно это мы и сдѣлали для того, чтобы найти параболу безопасности.

157. Криволинейное движеніе тяжелаго тѣла въ сопротивляющейся средѣ. — Когда снарядъ движется, то его центръ тяжести перемѣщается такъ, какъ если бы вся масса тѣла была сосредоточена въ центрѣ тяжести и всѣ приложенныя къ снаряду внѣшнія силы были перенесены въ эту точку параллельно самимъ себѣ.

Въ случаѣ, который насъ интересуетъ, центръ тяжести находится подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: вѣса снаряда и сопротивленія среды R , которое представляетъ собой равнодѣйствующую поверхностныхъ давленій, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ въ центръ тяжести. Собственно говоря, давленія не имѣютъ равнодѣйствующей: вообще, они могутъ быть приведены къ результирующему вектору R , приложенному къ центру тяжести, и парѣ. Если снарядъ имѣетъ произвольную форму, то мы ничего не знаемъ о направленіи этого сопротивленія; послѣднее можетъ вывести центръ тяжести изъ вертикальной плоскости, въ которой онъ былъ брошенъ въ моментъ $t=0$. Однако, если снарядъ имѣетъ шаровую форму и не вращается, то сопротивление лежитъ въ вертикальной плоскости, содержащей скорость центра G , и вслѣдствіе симметричности траекторія будетъ плоской. Для возможно большаго упрощенія мы допустимъ еще, что это сопротивление есть сила R , направленная противоположно скорости центра тяжести; сопротивление R есть функція этой скорости v и увеличивается вмѣстѣ съ v .

Если допустить, что сопротивление находится въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ скорость центра тяжести, то можно аналитически доказать, что траекторія будетъ плоской. Для доказательства отнесемъ движеніе къ тремъ прямоугольнымъ осямъ Ox ,

Oy , Oz ; ось Oz направим вертикально вверхъ. Если обозначить черезъ R_x , R_y , R_z проекціи сопротивленія и пользоваться Лагранжевыми обозначеніями x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' для производныхъ по t отъ координатъ x , y , z , то уравненія движенія будутъ

$$mx'' = R_x, \quad my'' = R_y, \quad mz'' = R_z - mg.$$

Изъ двухъ первыхъ уравненій мы выведемъ соотношеніе

$$\frac{x''}{R_x} = \frac{y''}{R_y}.$$

Такъ какъ плоскость, служащая для проектированія сопротивленія на горизонтальную плоскость, совпадаетъ съ проектирующей плоскостью скорости, то проекціи R_x и R_y пропорціональны производнымъ x' и y' ²⁸⁾. Предыдущее отношеніе поэтому обращается въ

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'};$$

интегрируя, мы найдемъ, что

$$\log y' = \log Cx';$$

переходя къ числамъ и интегрируя вторично, получимъ:

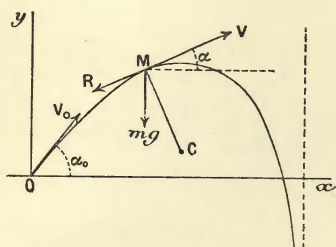
$$y = Cx + C';$$

траекторія есть плоская кривая, лежащая въ вертикальной плоскости; это та самая плоскость, которая проектируетъ начальную скорость на горизонтальную плоскость.

Примемъ эту плоскость за плоскость xOy , возьмемъ начало координатъ въ начальномъ положеніи движущейся точки и направимъ ось Oy вертикально кверху, а ось Ox — въ ту сторону отъ оси Oy , гдѣ лежитъ начальная скорость.

Мы будемъ исходить изъ внутреннихъ уравненій движенія. Обозначимъ черезъ s дугу траекторіи OM , черезъ α — уголъ скорости v съ осью Ox и черезъ ρ — радіусъ кривизны MC (фиг. 112). На точку дѣйствуютъ двѣ силы: сопротивленіе R и вѣсъ mg ; ихъ равнодѣйствующая всегда направлена въ сторону отрицательныхъ y -овъ относительно касательной R . Но направленіе силы опредѣ-

леть собой сторону, въ которую обращена вогнутость; траекторія будетъ обращена, слѣдовательно, своей вогнутостью въ сторону отрицательныхъ y -овъ. Уголъ α будетъ постоянно уменьшаться; онъ



Фиг. 112.

имѣть извѣстное начальное значеніе α_0 , въ самой высокой точкѣ траекторіи онъ обращается въ нуль и затѣмъ продолжаетъ уменьшаться; ниже мы увидимъ, что его предѣлъ есть $-\frac{\pi}{2}$.

Взявъ проекціи силъ на касательную, мы будемъ имѣть (п. 144):

$$m \frac{dv}{dt} = F_t = -mg \sin \alpha - R.$$

Въ этомъ уравненіи R есть функція скорости, которую мы напомнимъ такъ:

$$R = mg \varphi(v);$$

слѣдовательно,

$$\frac{dv}{dt} = -g[\sin \alpha + \varphi(v)]. \quad (1)$$

Теперь проектируемъ силы на нормаль:

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \alpha;$$

но, съ другой стороны,

$$\rho = -\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\alpha} = -v \frac{dt}{d\alpha};$$

мы должны здѣсь взять знакъ минусъ, потому что уголъ α убываетъ съ возрастаніемъ дуги s , между тѣмъ какъ ρ есть абсолютная величина радіуса кривизны. Подставивъ значеніе ρ въ предыдущее уравненіе, мы получимъ:

$$-v \frac{d\alpha}{dt} = g \cos \alpha. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) дают возможность найти t и v въ функцияхъ отъ α ; исключимъ dt , раздѣливъ эти уравненія почленно одно на другое; мы получимъ уравненіе

$$\frac{dv}{v d\alpha} = \tan \alpha + \frac{\varphi(v)}{\cos \alpha}. \quad (3)$$

Это уравненіе перваго порядка дастъ намъ v въ функцияхъ отъ α :

$$v = \psi(\alpha);$$

уравненіе (2) дастъ намъ теперь:

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\psi(\alpha)}{\cos \alpha} d\alpha. \quad (4)$$

Мы можемъ также выразить x и y въ функцияхъ отъ α при помощи новыхъ квадратуръ; въ самомъ дѣлѣ,

$$\left. \begin{aligned} dx &= v \cos \alpha dt, & x &= -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} [\psi(\alpha)]^2 d\alpha. \\ dy &= v \sin \alpha dt, & y &= -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} [\psi(\alpha)]^2 \tan \alpha d\alpha; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

такимъ образомъ, рѣшеніе задачи будетъ окончено при помощи простыхъ квадратуръ, когда функція $\psi(\alpha)$ уже найдена.

Выраженіе (2) показываетъ, что производная $\frac{dt}{d\alpha}$ имѣетъ отрицательное значеніе, и потому время возрастаетъ съ убываніемъ угла α , пока уголъ α превышаетъ $-\frac{\pi}{2}$; такъ же измѣняется и x , потому что $dx = v \cos \alpha dt$. Что касается ординаты y , то ея значенія возрастаютъ до того момента, когда уголъ α становится равнымъ нулю, послѣ чего производная $\frac{dy}{dt}$ мѣняетъ свой знакъ, y убываетъ, и тѣло опускается. Положивъ въ предыдущихъ интегралахъ $\alpha = 0$, мы получимъ значенія x , y , t , соответствующія наиболѣе высокой точкѣ траекторіи.

Можно замѣтить, что соотношеніе $v = \psi(\alpha)$ есть уравненіе годографа движенія въ полярныхъ координатахъ.

Мы рассмотрим подробно случай (Лежандръ), когда сопротивление задано функцией

$$\varphi(v) = a + bv^n,$$

гдѣ всѣ количества a, b, n имѣютъ положительныя значенія. Мы будемъ предполагать, что число a меньше единицы, потому что, въ противномъ случаѣ, если бы мы предоставили тѣло, не имѣющее начальной скорости самому себѣ, то первоначальное сопротивление mga превышало бы вѣсъ, и снарядъ не падалъ бы.

Уравненіе (3) въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ

$$\frac{dv}{v da} = \operatorname{tang} \alpha + \frac{a + bv^n}{\cos \alpha};$$

раздѣливъ обѣ части уравненія на $\frac{-v^n}{n}$ и принявъ выраженіе $\frac{1}{v^n}$ за новую неизвѣстную, мы получимъ:

$$\frac{d\left(\frac{1}{v^n}\right)}{da} + \frac{n}{v^n} \left(\operatorname{tang} \alpha + \frac{a}{\cos \alpha} \right) + \frac{nb}{\cos \alpha} = 0.$$

Для интегрированія этого уравненія, положимъ

$$\frac{1}{v^n} = pq,$$

тогда оно преобразуется въ

$$p \frac{dq}{da} + q \frac{dp}{da} + npq \left(\operatorname{tang} \alpha + \frac{a}{\cos \alpha} \right) + \frac{nb}{\cos \alpha} = 0;$$

распорядимся вспомогательной неизвѣстной q такъ, чтобы коэффициентъ при p обратился въ нуль, и мы получимъ уравненіе

$$\frac{dq}{q} = -n \operatorname{tang} \alpha da - \frac{na da}{\cos \alpha},$$

которое допускаетъ частный интегралъ

$$\log q = n \log \cos \alpha - na \log \operatorname{tang} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$q = \cos^n \alpha \left[\operatorname{tang} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-na};$$

Приписавъ q это значеніе, мы для опредѣленія p имѣемъ уравненіе

$$\frac{dp}{da} = -\frac{nb}{q \cos \alpha};$$

проинтегрировавъ его между a_0 и a и обозначивъ черезъ q_0 значеніе q при $a = a_0$ и черезъ v_0 начальную скорость, мы будемъ имѣть:

$$p = \frac{1}{qv^n} = C - nb \int_{a_0}^a \frac{da}{q \cos \alpha};$$

положивъ $a = a_0$, мы найдемъ, что постоянная C равна $\frac{1}{q_0 v_0^n}$. Подставивъ вмѣсто функціи q найденное для нея выше значеніе, мы будемъ имѣть v въ функціи отъ a ; затѣмъ при помощи найденныхъ раньше формулъ (4) и (5) мы опредѣлимъ x , y , t .

Докажемъ, что при возрастаніи угла a до $-\frac{\pi}{2}$ время возрастаетъ безпредѣльно, а y обращается въ отрицательную безконечность, тогда какъ величины v и x обѣ имѣютъ конечные предѣлы: кривая имѣетъ на конечномъ разстояніи вертикальную асимптоту, и движеніе стремится стать прямолинейнымъ и равномернымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ на q выраженіе, которымъ опредѣляется $\frac{1}{qv^n}$, мы получимъ:

$$\frac{1}{v^n} = \frac{q}{q_0 v_0^n} - nbq \int_{a_0}^a \frac{da}{q \cos \alpha}.$$

Когда a стремится къ $-\frac{\pi}{2}$, q стремится къ нулю; ибо $a < 1^{29}$; съ другой стороны, интегралъ въ правой части обращается въ безконечность. Такъ какъ членъ $\frac{q}{q_0 v_0^n}$ стремится къ нулю, то достаточно найти предѣлъ второго члена правой части; мы можемъ написать этотъ членъ въ формѣ отношенія

$$\frac{-nb \int_{a_0}^a \frac{da}{q \cos \alpha}}{\frac{1}{q}},$$

которое принимает неопределенный видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Отношеніе производныхъ по a равно

$$\frac{nbq \, da}{\cos a \, dq};$$

подставляя же вмѣсто $\frac{dq}{qda}$ найденное выше значеніе, имѣемъ для отношенія производныхъ выраженіе

$$\frac{b}{-\sin a - a};$$

положивъ, наконецъ, $a = -\frac{\pi}{2}$, мы найдемъ, что $\frac{1}{v^n}$ стремится къ предѣлу $\frac{b}{1-a}$, а скорость v — къ предѣлу

$$\lambda = \left(\frac{1-a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Интеграль

$$x = -\frac{1}{g} \int_{a_0}^a v^2 da,$$

которымъ опредѣляется x , остается конечнымъ, когда a стремится къ $-\frac{\pi}{2}$. Дѣйствительно, v имѣетъ конечный предѣлъ λ , а такъ какъ элементъ интеграла остается конечнымъ, то и значеніе x будетъ конечнымъ; оно стремится къ предѣлу

$$x_1 = -\frac{1}{g} \int_{a_0}^{-\frac{\pi}{2}} v^2 da.$$

Далѣе, t обращается въ безконечность при $a = -\frac{\pi}{2}$; дѣйствительно,

$$t = -\frac{1}{g} \int_{a_0}^a \frac{v \, da}{\cos a},$$

и дифференціальный элементъ обращается въ безконечность при $a = -\frac{\pi}{2}$, но такъ, что выраженіе $\frac{v}{\cos a} \left(a + \frac{\pi}{2} \right)$ стремится къ конечному предѣлу λ ; слѣдовательно, вблизи $a = -\frac{\pi}{2}$ этотъ интеграль обнаруживаетъ тѣ же свойства, что и интеграль

$$\int \frac{\lambda da}{a + \frac{\pi}{2}},$$

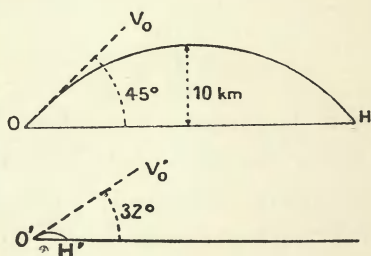
т. е. обращается въ безконечность. По той же причинѣ выраженіе для y ,

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \tan \alpha \, d\alpha,$$

безпредѣльно возрастаетъ, когда α стремится къ $-\frac{\pi}{2}$. Такимъ образомъ изложенныя выше предложенія доказаны.

Какъ и въ случаѣ прямолинейнаго нисходящаго движенія, этотъ предѣлъ λ скорости есть корень уравненія $\varphi(\lambda) = 1$.

Замѣчаніе. — При тѣхъ начальныхъ скоростяхъ, которыя въ настоящее время сообщаются артиллерійскимъ снарядамъ и ружейнымъ пулямъ, дѣйствительная траекторія отличается отъ параболической формы, которую она получила бы въ пустотѣ, въ такой степени, что парабола уже не даетъ намъ никакого представленія о траекторіи. Фиг. 113, заимствованная нами изъ книги Клейна (Klein)



Фиг. 113.

и Зоммерфельда (Sommerfeld) „Theorie des Kreisels“, стр. 533, показываетъ огромную разницу между двумя соотвѣтственными кривыми, какъ по формѣ, такъ и по дальности. При начальной скорости около 620 м. въ секунду нѣмецкая ружейная пуля модели 88 имѣла бы въ пустотѣ максимальную дальность полета OH , равную 40 км.; въ дѣйствительности же, въ воздухѣ, максимальная дальность $O'H'$ соотвѣтствуетъ углу прицѣла въ 32° и равна 4 км.

IV. — ЦЕНТРАЛЬНЫЯ СИЛЫ. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНІЕ ПЛАНЕТЪ.

158. Уравненія движенія. — Сила называется центральной, если ея направленіе постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку; эта точка называется центромъ силъ. Возьмемъ начало

координатъ въ центрѣ силъ и условимся обозначать черезъ F абсолютную величину силы, предшествуемую знакомъ $+$ въ случаѣ отталкивательной силы и знакомъ $-$ въ случаѣ силы притягивающей. Выше мы видѣли (п. 147), что траекторія есть кривая, плоскость которой проходитъ черезъ центръ силъ. Эта плоскость опредѣляется начальнымъ положеніемъ и начальной скоростью движущейся точки. Въ случаѣ, если бы начальная скорость была равна нулю или была направлена по радіусу-вектору, эта плоскость оставалась бы неопредѣленной, но тогда движеніе было бы прямолинейнымъ: оно совершалось бы вдоль радіуса-вектора.

Плоскость траекторіи примемъ за плоскость xOy . При нашемъ условіи относительно знака F , проекціи силы будутъ $\frac{Fx}{r}$ и $\frac{Fy}{r}$. Мы могли бы воспользоваться общими уравненіями движенія въ плоскости; но проще будетъ исходить изъ уравненій, доставляемыхъ началомъ площадей и теоремой живыхъ силъ.

Интегралъ площадей

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C$$

въ полярныхъ координатахъ напишется такъ:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C. \quad (1)$$

Мы видѣли (п. 147), что C есть моментъ начальной скорости около оси Oz ; эта постоянная опредѣляется, слѣдовательно, изъ начальныхъ условій: она равна произведенію $\rho_0 v_0$ начальной скорости v_0 на разстояніе ея ρ_0 отъ центра, при чемъ произведение берется со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, обращаетъ ли начальная скорость движущуюся точку отъ оси Ox къ оси Oy или наоборотъ.

Примѣнивъ теперь теорему живыхъ силъ, мы получимъ

$$d \frac{mv^2}{2} = F dr. \quad (2)$$

Уравненія (1) и (2) вполне опредѣляютъ движеніе; они послужатъ намъ для нахождения r и θ въ функціи времени.

Скорость выражается формулой

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2};$$

при помощи уравненія (1) мы можемъ исключить изъ этого выраженія $d\theta$ или dt ; это даетъ намъ послѣдовательно:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}, \quad (3)$$

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \right], \text{ при чемъ } \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \text{ замѣнено выраженіемъ } \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2. \quad (4)$$

Самымъ простымъ случаемъ будетъ тотъ, когда сила зависить лишь отъ разстоянія r ; вопросъ приводится тогда къ квадратурамъ, потому что $F dr$ будетъ полнымъ дифференціаломъ, и уравненіе (2) дастъ намъ v^2 въ функціи отъ r ; подставивъ это значеніе v^2 въ уравненія (3) и (4), мы найдемъ t и θ при помощи квадратуръ.

Возвратимся къ общему случаю. Мы можемъ получить еще два важныхъ уравненія, подставивъ въ уравненіе живыхъ силъ значеніе v^2 изъ уравненія (3) или изъ уравненія (4). Воспользуемся сперва уравненіемъ (3); написавъ уравненіе живыхъ силъ въ видѣ $\frac{1}{2} \frac{dmv^2}{dt} = F \frac{dr}{dt}$, мы получимъ

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right] \right\} = F \frac{dr}{dt};$$

выполнивъ дифференцированіе и раздѣливъ обѣ части на $\frac{dr}{dt}$, мы получимъ:

$$m \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} \right) = F,$$

или

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = F + m \frac{C^2}{r^3}. \quad (5)$$

Это уравненіе опредѣляетъ относительное движеніе точки по радіусу-вектору; оно показываетъ, что это движеніе таково, какъ если бы радіусъ-векторъ былъ неподвиженъ, а сила, дѣйствующая на точку, увеличилась бы на $m \frac{C^2}{r^3}$. Изъ того же соотношенія можно получить r въ функціи отъ t , когда F есть функція лишь отъ разстоянія r или, въ болѣе общемъ случаѣ, отъ r и t .

Воспользуемся теперь выраженіемъ (4) для v^2 , чтобы подставить его въ уравненіе живыхъ силъ. Написавъ сперва уравненіе живыхъ силъ въ формѣ $\frac{1}{2} \frac{dmv^2}{d\theta} = F \frac{dr}{d\theta}$, мы получимъ:

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{mC^2}{2} \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \right] \right\} = F \frac{dr}{d\theta};$$

выполнивъ дифференцирование и замѣнивъ производную $\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r}$ ея значеніемъ $-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$, мы дѣлимъ обѣ части на $\frac{dr}{d\theta}$ и получаемъ найденную Бине (Binet) формулу

$$F = -\frac{mC^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \right). \quad (6)$$

Это уравненіе можетъ служить для нахождения r въ функціи отъ θ , т. е. для нахождения уравненія траекторіи, если F зависитъ лишь отъ r или, въ болѣе общемъ случаѣ, отъ r и θ . Извѣстно, что сила всегда направлена въ сторону вогнутости траекторіи; мы можемъ провѣрить это на уравненіи (6), второй членъ котораго будетъ отрицательнымъ или положительнымъ въ зависимости отъ того, обращена ли траекторія къ полюсу своей вогнутостью или нѣтъ; если въ нѣкоторомъ положеніи движущейся точки сила равна нулю, то траекторія имѣетъ точку перегиба.

159. Сила есть функція только отъ разстоянія. — Изучимъ подробнѣе важный случай, когда

$$F = \varphi(r);$$

уравненіе (2) интегрируется непосредственно и даетъ:

$$\frac{mv^2}{2} = \int \varphi(r) dr + h;$$

чтобы имѣть соотношеніе между r и t , мы подставимъ вмѣсто v^2 его значеніе изъ уравненія (3); тогда мы получимъ уравненіе вида:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \psi(r), \quad dt = \frac{dr}{\pm \sqrt{\psi(r)}};$$

t опредѣляется, такимъ образомъ, посредствомъ простой квадратуры. Теперь нетрудно получить уравненіе траекторіи; действительно, уравненіе (1) даетъ намъ

$$d\theta = \frac{C}{r^2} dt = \frac{C dr}{\pm r^2 \sqrt{\psi(r)}},$$

и θ получается при помощи квадратуры.

Теперь разсмотримъ, какой знакъ нужно взять передъ радикаломъ; выборъ зависитъ отъ начальныхъ условий. Известно, что проекція скорости на радіусъ векторъ равна $\frac{dr}{dt}$; зная начальную скорость, мы вмѣстѣ съ тѣмъ знаемъ и знакъ количества $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$; вначалѣ мы поставимъ передъ радикаломъ этотъ знакъ и сохранимъ его до того момента, когда $\psi(r)$ обратится въ нуль; нужно будетъ опредѣлить, какой знакъ слѣдуетъ взять послѣ этого. Затрудненіе возникаетъ лишь въ томъ случаѣ, когда количество $\psi(r_0)$ есть нуль, т. е. когда начальная скорость перпендикулярна къ радіусу-вектору. Разсмотримъ тогда уравненіе движенія по радіусу-вектору; начальная скорость $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ этого движенія есть нуль, и движеніе совершается такимъ образомъ, какъ если бы радіусъ-векторъ былъ неподвиженъ, а сила была бы равна $F + \frac{mC^2}{r^3}$; поэтому, если эта воображаемая сила вначалѣ будетъ положительной, то r вначалѣ увеличивается, и мы возьмемъ знакъ $+$; если же сила будетъ отрицательной, то r вначалѣ уменьшается, и мы беремъ знакъ $-$. Предположимъ, наконецъ, что $F_0 + \frac{mC^2}{r_0^3} = 0$; въ этомъ случаѣ для наблюдателя, который переносится вмѣстѣ съ радіусомъ-векторомъ, точка остается неподвижной на радіусъ-векторѣ, потому что движеніе точки на радіусъ-векторѣ таково, какъ если бы этотъ радіусъ былъ неподвиженъ, а точка, не имѣя начальной скорости, находилась бы въ томъ положеніи, гдѣ воображаемая сила равна нулю. Траекторія будетъ окружностью радіуса r_0 , и, въ силу теоремъ о площадяхъ, движеніе будетъ равномернымъ.

Разсмотримъ, въ какія именно начальные условія нужно поставить движущуюся точку, чтобы получить это круговое движеніе. Начальная скорость должна быть перпендикулярна къ начальному радіусу-вектору, откуда $C = \pm r_0 v_0$ (ср. стр. 281), и нужно, чтобы было $F_0 + \frac{mC^2}{r_0^3} = 0$; отсюда, подставляя вмѣсто постоянной C ея значеніе, мы найдемъ

$$v_0 = \sqrt{\frac{-F_0 r_0}{m}};$$

это значеніе будетъ вещественнымъ лишь въ томъ случаѣ, если сила F_0 будетъ отрицательной, т. е. если имѣетъ мѣсто притяженіе.

Примѣръ. — Два наиболѣе важныхъ приложенія предыдущей теоріи относятся къ случаю силы, прямо пропорціональной разстоянію, и къ случаю силы, обратно пропорціональной квадрату разстоянія. Послѣдній случай будетъ подробно разсмотрѣнъ въ теоріи движенія планетъ. Мы займемся первымъ и разсмотримъ сперва движущуюся точку, притягиваемую точкой O (фиг. 114) съ силой, пропорціональной разстоянію :

$$F = -mk^2r, \quad v^2 = -k^2r^2 + h.$$

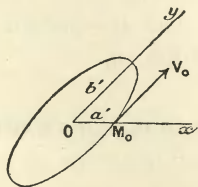
Изложенные выше общіе методы дадутъ уравненіе траекторіи и время. Проще, однако, исходить изъ уравненій движенія, которыя и въ косоугольныхъ осяхъ имѣютъ слѣдующій видъ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y;$$

это суть линейныя уравненія съ постоянными коэффициентами ;

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x'_0}{k} \sin kt, \quad y = y_0 \cos kt + \frac{y'_0}{k} \sin kt$$

суть общіе интегралы этихъ уравненій, при чемъ x'_0 и y'_0 означаютъ проекціи на оси скорости движущейся точки въ моментъ $t = 0$



Фиг. 114.

(п. 152). Въ частности, если осью Ox служить начальный радиус-векторъ, а осью Oy — прямая, параллельная начальной скорости, то

$$x_0 = r_0, \quad y'_0 = v_0, \quad y_0 = x'_0 = 0,$$

$$x = r_0 \cos kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt,$$

откуда получимъ уравненіе траекторіи

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2 k^2}{v_0^2} = 1,$$

это есть уравнение эллипса, отнесенного къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, коихъ длины суть $a' = r_0$, $b' = \frac{v_0}{k}$. Продолжительность обращенія по эллипсу равна $\frac{2\pi}{k}$. Такъ какъ любой моментъ можно считать начальнымъ, то ясно, что скорость движущейся точки въ любомъ положеніи равна kb' , гдѣ b' есть длина полудіаметра, параллельнаго скорости, т. е. сопряженного съ радіусомъ-векторомъ.

Если движущаяся точка отталкивается точкой O съ силой, пропорціональной разстоянію, $F = mk^2r$, то мы получимъ уравненія, которыя выводятся изъ предыдущихъ путемъ замѣны k на $k\sqrt{-1}$; выбравъ такія же координатныя оси, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, мы получимъ

$$x = r_0 \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}, \quad y = \frac{v_0}{k} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2};$$

траекторіей теперь служить гипербола

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{k^2 y^2}{v_0^2} = 1,$$

имѣющая центръ въ точкѣ O ; какъ и въ предыдущемъ случаѣ, скорость въ каждой точкѣ равна произведенію числа k на длину полудіаметра, параллельнаго скорости.

160. Случай, когда сила выражается въ формѣ $r^{-2}\varphi(\theta)$.— Якоби показалъ, что можно привести къ квадратурамъ случай, когда центральная сила выражается въ формѣ $F = r^{-2}\varphi(\theta)$, т. е. выражается въ декартовыхъ координатахъ однородною функціе измѣренія — 2 относительно x и y . Въ этомъ случаѣ формула

$$F = -\frac{mC^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right)$$

даетъ для опредѣленія траекторіи уравненіе

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\varphi(\theta)}{mC^2},$$

Мы получили линейное уравнение съ постоянными коэффициентами и съ послѣднимъ членомъ; общій интеграль его будетъ вида

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta + \psi(\theta),$$

гдѣ A и B суть произвольныя постоянныя, а $\psi(\theta)$ есть частный интеграль этого уравненія, который всегда можно найти посредствомъ квадратуръ.

161. Обратная задача. Опредѣленіе центральной силы, если траекторія дана. — Рассмотримъ слѣдующую задачу:

Движущаяся точка описываетъ вокругъ неподвижной точки данную плоскую траекторію, слѣдуя закону площадей; найти силу, которая порождаетъ это движеніе.

Прежде всего замѣтимъ, что эта сила должна быть центральной. Дѣйствительно, возьмемъ начало въ неподвижной точкѣ; законъ площадей даетъ намъ уравненіе

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C;$$

дифференцируя его, получимъ уравненіе

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

которое показываетъ, что ускореніе и, слѣдовательно, сила постоянно проходитъ черезъ начало. Пусть теперь F будетъ алгебраическое значеніе силы; въ силу уравненія (6)

$$F = -\frac{mC^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right);$$

по условію, уравненіе траекторіи $f(r, \theta) = 0$ извѣстно; изъ него $\frac{1}{r}$ опредѣляется, какъ функція отъ θ , положимъ, $\frac{1}{r} = \varphi(\theta)$; такимъ образомъ имѣемъ:

$$F = -\frac{mC^2}{r^2} [\varphi(\theta) + \varphi''(\theta)].$$

Если ничего не задано заранѣе относительно вида выраженія силы F , то въ задачѣ будетъ содержаться неопредѣленность: такъ какъ r и θ связаны уравненіемъ траекторіи, то полученное выраженіе силы F мы

можемъ преобразовывать безчисленнымъ множествомъ способовъ. Можно выразить силу F въ функціи лишь отъ разстоянія r , чего обыкновенно и добиваются. Для этой цѣли нужно изъ предыдущаго уравненія и уравненія траекторіи исключить θ .

Примѣры. — 1° Возьмемъ случай, когда точка движется по коническому сѣченію, слѣдуя закону площадей относительно фокуса кривой, и вогнутость обращена къ фокусу. Беремъ полюсъ въ фокусъ; тогда уравненіе коническаго сѣченія будетъ

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

гдѣ p — параметръ и e — эксцентриситетъ. Отсюда

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta^2} = \frac{1}{p}, \quad F = -\frac{mC^2}{pr^2};$$

слѣдовательно, на точку дѣйствуетъ сила притяженія, которая измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія.

2° Если мы рѣшимъ ту же самую задачу для вѣтви гиперболы, которая обращена къ фокусу своей выпуклостью и имѣетъ уравненіе

$$\frac{1}{r} = \frac{e \cos \theta - 1}{p},$$

то мы найдемъ, что

$$F = \frac{mC^2}{pr^2},$$

т. е. сила слѣдуетъ тому же закону, но здѣсь уже имѣетъ мѣсто не притяженіе, а отталкиваніе.

162. Движеніе планетъ. Слѣдствія изъ законовъ Кеплера. — Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ говорить лишь о движеніи центра тяжести планетъ. По теоремѣ, которую мы докажемъ позже, этотъ центръ тяжести движется такъ, какъ если бы вся масса планеты была сосредоточена въ этой точкѣ и всѣ силы, приложенныя къ планетѣ, были перенесены въ ту же точку параллельно самимъ себѣ.

Законы движенія планетъ были выведены Кеплеромъ изъ наблюденій Тихо Браге. Эти законы слѣдующіе:

1° Планеты описываютъ вокругъ солнца плоскія кривыя, слѣдуя закону площадей.

2° Эти кривыя суть эллипсы, фокусомъ которыхъ служитъ солнце.

3° Квадраты временъ обращенія планетъ пропорціональны кубамъ большихъ осей орбитъ.

Изъ этихъ законовъ Ньютонъ вывелъ законъ силы, порождающей это движеніе.

Такъ какъ траекторія плоская и законъ площадей имѣетъ мѣсто относительно центра солнца, то сила должна быть центральной и должна проходить черезъ эту точку. Далѣе, такъ какъ траекторія есть эллипсъ, фокусомъ котораго служить солнце, то сила, дѣйствующая на планету, обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ солнца. Мы нашли выраженіе этой силы (первый примѣръ предыдущаго пункта):

$$F = -\frac{mC^2}{pr^2},$$

гдѣ C есть постоянная площадей и p — параметръ конического сѣченія. Полагая $\mu = \frac{C^2}{p}$, мы можемъ написать это выраженіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}.$$

На основаніи послѣдняго закона Кеплера можно показать, что число μ не зависитъ отъ разсматриваемой планеты. Дѣйствительно, постоянная площадей C равна удвоенному отношенію площади, описанной радіусомъ-векторомъ, ко времени, которое требуется для этого; если T есть періодъ полного обращенія, то радіусъ-векторъ описываетъ за время T площадь πab ; слѣдовательно,

$$C = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Такъ какъ $p = \frac{b^2}{a}$, то мы имѣемъ слѣдующее выраженіе для числа μ :

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

По закону, о которомъ идетъ рѣчь, отношеніе $\frac{a^3}{T^2}$ имѣетъ постоянное значеніе для всѣхъ планетъ; слѣдовательно, для любой планеты

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}.$$

Итакъ, каждая планета притягивается къ центру солнца съ силой, пропорціональной массѣ планеты и обратно пропорціональной квадрату ея разстоянія отъ солнца.

163. Прямая задача. — Найдя этотъ результатъ, Ньютонъ поставилъ себѣ слѣдующій вопросъ:

Найти движеніе матеріальной точки, притягиваемой къ неподвижному центру съ силой, обратно пропорціональной квадрату разстоянія.

Такъ какъ центральная сила

$$F = -\frac{m\mu}{r^2},$$

то уравненіе живыхъ силъ даетъ:

$$d\frac{v^2}{2} = -\frac{\mu}{r^2} dr, \quad v^2 = \frac{2\mu}{r} + h.$$

Далѣе, согласно теоріи центральныхъ силъ [п. 158, формула (4)], имѣемъ:

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right].$$

Подставивъ вмѣсто v^2 его значеніе, мы получимъ:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{C^2} \left(\frac{2\mu}{r} + h \right);$$

это есть дифференціальное уравненіе траекторіи; мы можемъ его написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} \right)^2 + \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}.$$

Положимъ

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \varrho \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}};$$

относительно ϱ мы будемъ теперь имѣть уравненіе:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\theta} \right)^2 = 1 - \varrho^2, \quad d\theta = \frac{\pm d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}};$$

интегрируя его, получимъ:

$$\theta - \alpha = \mp \arccos \varrho, \quad \varrho = \cos(\theta - \alpha).$$

Слѣдовательно, уравненіе траекторіи имѣетъ видъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}} \cos(\theta - \alpha).$$

Мы можемъ всегда предположить, что передъ радикаломъ берется знакъ $+$; дѣйствительно, въ случаѣ, если бы радикалъ былъ отрицательнымъ, мы могли бы сдѣлать его положительнымъ, прибавивъ къ произвольной постоянной α число π . Нетрудно доказать, что полученное уравненіе представляетъ коническое сѣченіе, фокусомъ котораго служить полюсъ. Дѣйствительно, общее уравненіе коническихъ сѣченій въ полярныхъ координатахъ съ полюсомъ въ фокусѣ есть

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\theta - \alpha),$$

гдѣ p обозначаетъ параметръ и e — эксцентриситетъ. Отождествляя эти два уравненія, мы найдемъ:

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \quad e = p \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}},$$

или, принявъ во вниманіе значеніе p ,

$$e = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}}.$$

Это выраженіе указываетъ намъ видъ коническаго сѣченія, который зависитъ, какъ мы сейчасъ увидимъ, лишь отъ знака постоянной h живыхъ силъ.

Если $h < 0$, то траекторія есть эллипсъ, потому что $e < 1$; если $h = 0$ или $h > 0$, то траекторіей служитъ парабола или вѣтвь гиперболы, обращенная вогнутостью къ полюсу. Постоянная живыхъ силъ имѣетъ значеніе $h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$, которое зависитъ лишь отъ численнаго значенія скорости, но не отъ ея направленія. Поэтому, если опредѣленные начальныя условія дали для траекторіи эллипсъ, то траекторія останется эллипсомъ, когда тѣло

брошено изъ той же точки съ той же начальной скоростью въ любомъ другомъ направленіи.

Сдѣланное нами вычисленіе неявно содержитъ въ себѣ и случай отталкиванія; чтобы разобрать этотъ случай, достаточно положить во всѣхъ нашихъ формулахъ $\mu < 0$. При этихъ условіяхъ постоянная h будетъ всегда положительной, и мы всегда будемъ имѣть вѣтвь гиперболы. Эта вѣтвь гиперболы обращена къ началу своей выпуклостью, потому что сила лежитъ въ вогнутости траекторіи.

Займемся случаемъ эллипса, предполагая $h < 0$, и выразимъ элементы траекторіи посредствомъ начальныхъ значеній перемѣнныхъ. Мы нашли:

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}},$$

откуда

$$h = \frac{\mu^2}{C^2} (e^2 - 1) = \frac{\mu}{p} (e^2 - 1);$$

введя оси эллипса, получимъ соотношеніе:

$$h = \frac{\mu}{b^2} \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) = -\frac{\mu}{a}.$$

Это соотношеніе даетъ намъ большую ось эллипса, которая зависитъ лишь отъ постоянной живыхъ силъ. Затѣмъ мы опредѣлимъ малую ось изъ равенствъ

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu}.$$

Вычисливъ такимъ образомъ большую полуось a , мы легко можемъ построить эллипсъ, зная начальное положеніе M_0 и начальную скорость V_0 . Беремъ точку P , симметричную съ фокусомъ относительно касательной V_0 , соединяемъ точки P и M_0 прямою и на этой прямой PM_0 откладываемъ длину $PM_0O' = 2a$; точка O' есть второй фокусъ эллипса.

164. Кометы. — Кеплеръ не изучалъ движенія кометъ: онъ считалъ ихъ преходящими метеорами. Ньютонъ же, замѣтивъ, что матеріальная точка, притягиваемая солнцемъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія, можетъ описывать не только эллипсъ, но и

параболу или вѣтвь гиперболы, которая обращена къ солнцу вогнутостью и имѣетъ своимъ фокусомъ солнце, пришелъ къ мысли, что кометы описываютъ, подобно планетамъ, эллипсы, въ фокусѣ которыхъ находится солнце. Онъ предположилъ, что въ отличіе отъ планетъ, которыя описываютъ эллипсы, имѣющіе малые эксцентриситеты и лежащіе почти въ одной плоскости, кометы описываютъ весьма удлинненные эллипсы, расположенные въ различныхъ плоскостяхъ. Онѣ появляются у насъ рѣдко, такъ какъ мы видимъ ихъ лишь въ той части ихъ орбиты, которая наиболѣе близка къ солнцу. Такъ какъ большая ось кометной орбиты очень велика, то эта ближайшая къ солнцу часть орбиты почти такова же, какъ если бы большая ось была безконечно велика, т. е. какъ если бы эллипсъ былъ замѣненъ параболой съ тѣмъ же фокусомъ и той же вершиной. Такимъ путемъ Ньютонъ пришелъ къ допущенію, что вблизи солнца комета должна описывать, слѣдуя закону площадей, дугу параболы, фокусомъ которой служитъ солнце; онъ имѣлъ случай провѣрить то, что онъ предвидѣлъ, на кометѣ, появившейся въ 1680 году. Галлей, современникъ Ньютона, сдѣлалъ такую же провѣрку на двадцати четырехъ кометахъ: всѣ послѣдующія наблюденія подтвердили правильность взглядовъ Ньютона. Представимъ себѣ комету, имѣющую массу m и описывающую по закону площадей дугу параболы, фокусомъ которой служитъ центръ солнца. На такую комету дѣйствуетъ сила F , которая направлена къ солнцу и выражается, какъ мы показали, формулой

$$F = -\frac{m C^2}{p} \frac{1}{r^2},$$

гдѣ p есть параметръ параболической дуги. Для второй кометы массы m' мы найдемъ аналогичное выраженіе силы

$$F' = -\frac{m' C'^2}{p'} \frac{1}{r'^2}.$$

Наблюденіе показываетъ, что отношенія $\frac{C^2}{p}$ и $\frac{C'^2}{p'}$ равны между собой и имѣютъ общее значеніе $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, относящееся ко всякой планетѣ. Слѣдовательно, центральная сила, дѣйствующая на комету, имѣетъ то же выраженіе, что и для планетъ:

$$F = -\frac{m\mu}{r^2};$$

коэффициентъ μ имѣетъ одно и то же значеніе для всѣхъ кометъ и для всѣхъ планетъ.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ выводу, что солнце притягиваетъ точку, имѣющую массу m и находящуюся на разстояніи r отъ центра солнца, съ силой $\frac{m\mu}{r^2}$, гдѣ μ есть коэффициентъ притяженія, зависящій отъ солнца и представляющій притяженіе солнцемъ точки, которая имѣетъ массу m и находится отъ центра на разстояніи единицы.

165. Спутники. — Наблюденія показываютъ, что спутники въ своихъ движеніяхъ вокругъ планетъ почти вполне подчиняются законамъ Кеплера. Отсюда заключаютъ, что всякая планета притягиваетъ своихъ спутниковъ пропорціонально ихъ массамъ и обратно пропорціонально квадрату ихъ разстояній отъ центра планеты. Планетами притягиваются также тѣла, лежащія у ихъ поверхности; какъ мы видѣли въ главѣ III, этимъ обуславливается тяжесть. Каждой планетѣ приписываютъ такой коэффициентъ притяженія λ , что притяженіе, оказываемое планетою на точку m_1 , находящуюся на разстояніи r_1 отъ центра, равно $\frac{\lambda m_1}{r_1^2}$. Этотъ коэффициентъ λ , выражающій притяженіе, производимое планетою на единицу массы, находящейся на разстояніи единицы, имѣетъ для каждой планеты свою величину.

Такимъ образомъ, притяженіе землею тѣлъ, находящихся у ея поверхности, и есть главная причина, почему тѣла, предоставленныя самимъ себѣ и не обладающія начальной скоростью, падаютъ по вертикали, а тѣла, брошенныя въ косомъ направленіи, описываютъ дугу параболы; эта дуга есть не что иное, какъ часть весьма удлиненнаго эллипса, фокусомъ котораго служитъ центръ земли: это вытекаетъ изъ того обстоятельства, что земля притягиваетъ внѣшнюю точку такимъ образомъ, какъ если бы вся масса земли была сосредоточена въ ея центрѣ. Сила, удерживающая луну въ ея орбитѣ, имѣетъ, слѣдовательно, ту же природу, что и сила тяжести. Ньютонъ доказалъ это такимъ способомъ: пусть a_1 будетъ большая полуось лунной орбиты, T_1 — продолжительность сидерическаго обращенія и m_1 — масса луны. Сила притяженія луны землею выразится слѣдующимъ образомъ:

$$F = -\frac{4\pi^2 a_1^3 m_1}{T_1^2 r_1^2},$$

Такъ какъ эксцентриситетъ лунной орбиты очень малъ, то мы разсматриваемъ эту орбиту, какъ окружность, центръ которой совпадаетъ съ центромъ земли; поэтому $r_1 = a_1$ и

$$F = -\frac{4\pi^2 a_1}{T_1^2} m_1.$$

Съ другой стороны, тяжелая точка массы m_1 , находящаяся у поверхности земли, т. е. на разстояніи отъ центра, равномъ радіусу ϱ земли, притягивается съ силой, которая мало отличается, какъ мы увидимъ дальшѣ, отъ вѣса, и которую мы будемъ считать поэтому тождественной съ вѣсомъ:

$$F' = -m_1 g.$$

Такъ какъ силы F и F_1 , должны быть обратно пропорціональны квадратамъ разстояній a_1 и ϱ отъ центра земли и $a_1 = 60 \varrho$, то должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$\frac{F'}{F} = \frac{a_1^2}{\varrho^2} = 60^2,$$

откуда

$$g = \frac{4\pi^2 \varrho}{T_1^2} 60^3.$$

Въ метрахъ $2\pi\varrho = 40\,000\,000$, и въ секундахъ

$$T_1 = 27^c 7^m 43^s = 39343.60.$$

Сдѣлавъ подстановку и вычисленіе, мы найдемъ, что $g = 9,7$ м.; это значеніе весьма мало отличается отъ средняго ускоренія $g = 9,8$ м. силы тяжести у поверхности земли. Небольшая разниа обуславливается допущенными нами приближеніями — при болѣе строгомъ вычисленіи она совершенно исчезла бы.

166. Всемірное тяготѣніе. — Итакъ, солнце притягиваетъ планеты, кометы и, вообще, всѣ тѣла; планеты, въ свою очередь, притягиваютъ своихъ спутниковъ, тѣла, находящіяся у ихъ поверхностей и, вообще, всѣ тѣла; онѣ должны, слѣдовательно, притягивать и солнце. Солнцу и каждой планетѣ соотвѣтствуетъ опредѣленный коэффициентъ притяженія.

Пусть M будетъ масса солнца, $m, m', m'', \dots$ — массы различныхъ планетъ, μ — коэффициентъ притяженія солнца, $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ — соотвѣтственные коэффициенты планетъ. Если разстояніе между солнцемъ и планетой m будетъ r , то солнце притягиваетъ планету съ силой, равной $\frac{m\mu}{r^2}$, планета притягиваетъ солнце съ силой, равной $\frac{M\lambda}{r^2}$: въ силу принципа равенства дѣйствія и противодѣйствія эти два притяженія должны быть равны; поэтому

$$m\mu = M\lambda, \quad \frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m}.$$

Разсматривая солнце въ связи съ другими планетами, мы найдемъ аналогично рядъ равныхъ отношеній

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda'}{m'} = \frac{\lambda''}{m''} = \dots = f.$$

Назовемъ черезъ f общее значеніе этихъ отношеній. Тогда сила взаимнаго притяженія солнца и какой-либо планеты равна

$$\frac{fMm}{r^2};$$

здѣсь M есть масса солнца, m — масса планеты, и f коэффициентъ, одинаковый для всѣхъ планетъ.

Этотъ результатъ, обобщенный Ньютономъ, выражаетъ законъ всемірнаго притяженія или тяготѣнія.

Двѣ матеріальныя точки, имѣющія массы m и m' и находящіяся на разстояніи r одна отъ другой, притягиваются съ силой $\frac{fmm'}{r^2}$. Постоянный коэффициентъ f выражаетъ силу, съ которой масса-единица притягиваетъ другую массу-единицу, находящуюся отъ нея на разстояніи единицы.

Постоянная f всемірнаго тяготѣнія опытнымъ путемъ была впервые опредѣлена Кэвендишемъ (Cavendish, „Philosophical Transactions“, 1798). Въ системѣ С. Г. С.

$$f = 10^{-9.67} = \frac{1}{3862^2}.$$

Средняя плотность земли. — Опредѣленіе коэффициента f имѣетъ чрезвычайно важное значеніе, такъ какъ оно даетъ массу и,

слѣдовательно, среднюю плотность земли. Въ теоріи притяженія доказывается, что шаръ, состоящій изъ концентрическихъ однородныхъ слоевъ, притягиваетъ внѣшнюю точку такъ, какъ если бы вся масса шара была сосредоточена въ центрѣ. Допуская, что земля приблизительно удовлетворяетъ этому условію и называя черезъ m массу земли и черезъ ϱ — ея радіусъ, мы находимъ, что притяженіе землею единицы массы, взятой у поверхности земли, равно $f \frac{m}{\varrho^2}$; съ другой стороны, это притяженіе мало отличается отъ вѣса g единицы массы, какъ это будетъ показано въ теоріи относительнаго равновѣсія; поэтому приближенно

$$f \frac{m}{\varrho^2} = g,$$

откуда можно получить величину m массы земли.

Зная массу земли, мы можемъ опредѣлить среднюю плотность земли; для этой цѣли мы вычисляемъ плотность, которую долженъ былъ бы имѣть однородный шаръ, имѣющій радіусъ, равный радіусу земли, и массу, равную массѣ земли. Эта средняя плотность значительно превышаетъ плотность поверхностныхъ слоевъ; отсюда заключаютъ, что глубокіе слои земли имѣютъ гораздо большую плотность, чѣмъ поверхностные.

Размѣрность коэффиціента f ; натуральный часъ. — Значеніе коэффиціента f зависитъ отъ выбора основныхъ единицъ, т. е. длины, времени и массы. Мы имѣемъ:

$$F = f \frac{mm'}{r^2}, \quad f = \frac{Fr^2}{mm'}.$$

Слѣдовательно, если взять въ λ разъ меньшую единицу длины, въ τ разъ меньшую единицу времени и въ μ разъ меньшую единицу массы, то новое значеніе коэффиціента f будетъ

$$f \frac{\lambda^3}{\mu\tau^2},$$

какъ мы это видѣли въ п. 68. Предположимъ, что мы разъ навсегда условимся принять за единицу массы кубъ, ребро котораго равно единицѣ длины и который состоитъ изъ опредѣленнаго вещества, напримѣръ, изъ воды при 4°; тогда $\mu = \lambda^3$, и коэффиціентъ f уже не будетъ измѣняться при измѣненіи единицы длины; онъ измѣ-

няется лишь съ измѣненіемъ единицы времени: если мы уменьшимъ единицу времени въ τ разъ, то коэффициентъ f обратится въ $\frac{f}{\tau^2}$. Примемъ за единицу времени секунду средняго времени; тогда

$$f = \frac{1}{3862^2};$$

если взять въ τ разъ меньшую единицу времени, то

$$f = \frac{1}{3862^2 \tau^2}.$$

Возьмемъ $\tau = \frac{1}{3862}$; тогда f будетъ имѣть значеніе 1; новая единица времени составляетъ 3862 секундъ средняго времени; она немного отличается отъ часа. Липпманъ (Lippmann) предложилъ называть ее натуральнымъ часомъ („Comptes rendus“, 8 мая 1899 г.). Согласно изложенному натуральный часъ есть та единица времени, которую слѣдовало бы принять, если бы мы пожелали, чтобы при произвольной единицѣ длины и при единицѣ массы, равной массѣ кубической единицы воды, постоянная всемірнаго тяготѣнія f была равна 1.

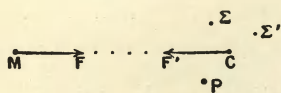
V. ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ СВѢДѢНІЯ ИЗЪ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ.

167. Задача о n тѣлахъ. — Мы видѣли выше, какимъ образомъ Ньютонъ пришелъ къ закону всемірнаго тяготѣнія. Исходя изъ этого закона, требуется теперь объяснить движеніе небесныхъ тѣлъ и, въ частности, тѣлъ, изъ которыхъ состоитъ солнечная система: солнца, планетъ, ихъ спутниковъ и кометъ. При изученіи относительныхъ движеній этихъ послѣднихъ тѣлъ мы будемъ совершенно пренебрегать вліяніемъ звѣздъ.

Двѣ главныя задачи небесной механики состоятъ въ слѣдующемъ: 1° найти движенія центровъ тяжести небесныхъ тѣлъ; 2° найти движенія небесныхъ тѣлъ вокругъ ихъ центровъ тяжести.

Мы ограничимся здѣсь нѣсколькими указаніями относительно первой задачи. Разсмотримъ группу, состоящую изъ планеты P и ея спутниковъ Σ , Σ' , Какъ мы увидимъ въ динамикѣ системъ, центръ тяжести G этой группы движется такъ, какъ будто всѣ

массы группы были сосредоточены въ немъ, и всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на группу, были перенесены параллельно самимъ себѣ въ точку G . Пусть M (фиг. 115) будетъ любая другая точка сол-



Фиг. 115.

нечной системы. Такъ какъ разстоянія этой точки отъ различныхъ точекъ Σ , Σ' , ... группы P очень велики въ сравненіи съ размѣрами группы, то равнодѣйствующая F силъ, съ которыми точка M притягивается тѣлами P , Σ , Σ' ..., почти такова же, какъ если бы группа была замѣнена матеріальной точкой, имѣющей такую же массу и находящейся въ G ; мы увидимъ это въ теоріи притяженія. Обратно, силы, съ которыми точка M притягиваетъ различныя точки Σ , Σ' , ... группы P равны и прямопротивоположны предыдущимъ; если перенесемъ ихъ параллельно имъ самимъ въ точку G , то онѣ дадутъ равнодѣйствующую F' , равную и прямопротивоположную силѣ F . Поэтому дѣйствіе группы P на точку M и движеніе центра тяжести почти такія же, какъ будто вся масса группы сосредоточена въ ея центрѣ тяжести.

Мы можемъ, слѣдовательно, сперва разсматривать солнечную систему, какъ состоящую изъ ограниченного числа матеріальныхъ точекъ, которыя взаимно притягиваются по закону Ньютона и расположены: первая — въ центрѣ тяжести солнца, вторая — въ центрѣ тяжести Меркурія, третья — въ центрѣ тяжести Венеры, четвертая — въ центрѣ тяжести земли и луны; пятая — въ центрѣ тяжести Марса и его двухъ спутниковъ и такъ далѣе.

Предположимъ, что число этихъ группъ равно n ; написавъ уравненія движенія n центровъ тяжести, мы получимъ систему изъ $3n$ дифференціальныхъ уравненій второго порядка, по три для каждаго центра тяжести. Эти уравненія, интегрированіе которыхъ составляетъ задачу о n тѣлахъ, допускаютъ семь извѣстныхъ первыхъ интеграловъ, которые мы приведемъ, какъ приложенія общихъ теоремъ, относящихся къ движенію системъ. При помощи современныхъ методовъ анализа невозможно выполнить интегриро-

ваніе этихъ уравненій. Тѣмъ не менѣ небесной механикѣ удалось съ помощью этихъ уравненій вычислить съ достаточной степенью приближенія движеніе центровъ тяжести небесныхъ тѣлъ; этимъ мы обязаны тому обстоятельству, что массы всѣхъ тѣлъ солнечной системы очень малы сравнительно съ массой солнца. Такъ, напримѣръ, масса Юпитера, самаго большого тѣла системы, не составляетъ и тысячной доли массы солнца. Если уменьшить число тѣлъ до трехъ, то мы получимъ знаменитую задачу о трехъ тѣлахъ.

Задача о двухъ тѣлахъ. — Разсмотримъ солнце S и группу P , состоящую изъ планеты и ея спутниковъ. Такъ какъ массы другихъ тѣлъ солнечной системы очень малы сравнительно съ массой солнца, то мы будемъ считать, въ первомъ приближеніи, что онѣ равны нулю, и вообразимъ, что мы имѣемъ дѣло только съ солнцемъ S и группой P . Замѣнимъ солнце точкой S массы M , равной массѣ солнца и находящейся въ его центрѣ тяжести, а группу P — точкой P , которая имѣетъ массу m , равную всей массѣ группы, и находится въ центрѣ тяжести послѣдней. Двѣ точки S и P , которыя мы назовемъ солнцемъ и планетой, движутся почти такъ, какъ двѣ точки, которыя имѣютъ массы M и m и взаимно притягиваются прямо пропорціонально ихъ массамъ и обратно пропорціонально квадратамъ разстояній.

Упрощенная задача, къ которой мы такимъ образомъ пришли, есть задача о двухъ тѣлахъ, всѣ интегралы которой могутъ быть найдены. Вычисливъ эти интегралы, въ небесной механикѣ переходятъ къ вопросу, какъ слѣдуетъ измѣнить эти интегралы, если принять въ расчетъ также и дѣйствія другихъ тѣлъ солнечной системы.

Обозначимъ черезъ α, β, γ и черезъ x, y, z координаты двухъ точекъ S и P , массы которыхъ равны соотвѣтственно M и m ; такъ какъ абсолютная величина силы взаимнаго притяженія этихъ двухъ точекъ равна $\frac{fMm}{r^2}$, то проекціи силы, дѣйствующей на точку S , равны

$$\frac{fMm}{r^2} \frac{x-\alpha}{r}, \quad \frac{fMm}{r^2} \frac{y-\beta}{r}, \quad \frac{fMm}{r^2} \frac{z-\gamma}{r};$$

проекціи силы, дѣйствующей на точку P , имѣютъ такія же выраженія, но съ обратными знаками.

Уравненія движенія, слѣдовательно, таковы:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2} \frac{x - a}{r}, \\ M \frac{d^2 \beta}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2} \frac{y - \beta}{r}, \\ M \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2} \frac{z - \gamma}{r} \end{array} \right.$$

и

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2} \frac{a - x}{r}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2} \frac{\beta - y}{r}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2} \frac{\gamma - z}{r}. \end{array} \right.$$

Присоединивъ соотношеніе

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2,$$

легко интегрировать эту систему, которая даетъ величины $a, \beta, \gamma, x, y, z$ въ функціи отъ t .

Сложивъ почленно соотвѣтственные уравненія системъ (S) и (P), мы получимъ три уравненія вида

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} + m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \dots;$$

и если ξ, η, ζ суть координаты центра тяжести системы, то эти уравненія принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\xi = \frac{Ma + mx}{M + m}, \quad \dots,$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0.$$

Эти три уравненія показываютъ, что центръ тяжести системы обладаетъ равномернымъ прямолинейнымъ движеніемъ, что вытекаетъ, какъ частный случай, изъ общей теоремы о движеніи центра тяжести.

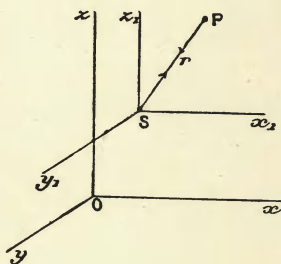
Найдемъ теперь движеніе точки P относительно точки S ; перенесемъ для этой цѣли координатныя оси въ положеніе $Sx_1y_1z_1$ (фиг. 116), и пусть x_1, y_1, z_1 будутъ новыя координаты точки P :

$$x_1 = x - \alpha, \quad y_1 = y - \beta, \quad z_1 = z - \gamma.$$

Раздѣливъ уравненія (S) на M , уравненія (P) на m и вычтя почленно уравненія (S) изъ соотвѣтственныхъ уравненій (P) , мы получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{f(M+m)}{r^2} \frac{x_1}{r}, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{f(M+m)}{r^2} \frac{y_1}{r}, \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{f(M+m)}{r^2} \frac{z_1}{r}. \end{aligned}$$

Это уравненія относительнаго движенія; видъ ихъ показываетъ, что точка x_1, y_1, z_1 движется относительно точки S такъ,



Фиг. 116.

какъ если бы эта послѣдняя точка была неподвижною, имѣла вмѣсто массы M массу $M+m$ и продолжала притягивать точку P по закону Ньютона. Дѣйствительно, написанныя уравненія представляютъ движеніе точки, имѣющей массу m и притягиваемой къ неподвижному началу съ силою $\frac{f(M+m)m}{r^2}$, при чемъ послѣднее выраженіе имѣеть видъ $\frac{\mu m}{r^2}$, гдѣ $\mu = f(M+m)$.

Отсюда вытекаетъ, что движеніе подчиняется первому закону Кеплера: относительная траекторія есть коническое сѣченіе, имѣющее фокусъ въ точкѣ S , и движеніе точки по этой траекторіи

происходить по закону площадей. Такъ какъ рѣчь идетъ о планетѣ, то это коническое сѣченіе есть эллипсъ, и если мы вычленимъ элементы этого эллипса, то найдемъ, какъ мы видѣли, что большая полуось a и періодъ обращенія T связаны соотношеніемъ

$$\mu = f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

и что отношеніе $\frac{a^3}{T^2}$ не зависитъ отъ массы m . Зная коэффициентъ f (п. 166), мы найдемъ изъ этого соотношенія приближенное значеніе суммы $M + m$.

Для другой планеты мы съ такой же степенью приближенія получимъ равенство

$$f(M + m_1) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}.$$

Сравненіе обоихъ равенствъ даетъ намъ соотношеніе:

$$\frac{a^3}{T^2} : \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{1 + \frac{m}{M}}{1 + \frac{m_1}{M}};$$

такъ какъ отношенія $\frac{m}{M}$ и $\frac{m_1}{M}$ представляютъ собою числа порядка одной тысячной, то ясно, что правая часть предыдущаго равенства очень мало отличается отъ единицы; слѣдовательно, послѣдній законъ Кеплера есть лишь приближенный законъ.

168. Определеніе времени въ эллиптическомъ движеніи. — Возвратимся теперь къ задачѣ о двухъ тѣлахъ и вспомнимъ, что планета P массы m такъ движется относительно осей, имѣющихъ постоянныя направленія и проведенныхъ черезъ центръ S солнца, какъ будто бы солнце было неподвижно и имѣло массу, превышающую его дѣйствительную массу M на величину m . Планета движется, слѣдовательно, вокругъ солнца, какъ точка массы m , находящаяся подъ дѣйствіемъ центральной силы

$$F = -f \frac{(M + m)m}{r^2} = -\frac{\mu m}{r^2} \quad [\mu = f(M + m)].$$

Орбита есть эллипсъ съ фокусомъ въ точкѣ S ; ея плоскость мы примемъ за плоскость xy . Называя черезъ p параметръ этого

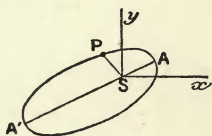
эллипса, через a его полуось, через e эксцентриситетъ, мы получимъ (см. п. 163) слѣдующія выраженія для постоянной C площадей и постоянной h живыхъ силъ:

$$C^2 = \mu p = \mu a (1 - e^2), \quad h = -\frac{\mu}{a}.$$

Ближайшая къ солнцу вершина A (фиг. 117) называется перигелиемъ, а вершина A' — афелиемъ. Обозначимъ через ω уголъ радиуса-вектора перигелия съ осью Sx и через w уголъ ASP радиуса-вектора $r = SP$ планеты съ прямой SA ; этотъ уголъ называется истинной аномаліей. Полярный уголъ $xSP = \theta$ связанъ съ истинной аномаліей очевидной формулой $\theta = w + \omega$, гдѣ ω есть константа. Вычислимъ теперь время, затрачиваемое движущимся тѣломъ на то, чтобы придти въ какую-нибудь точку траекторіи. Мы нашли, что

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

съ другой стороны, выраженіе скорости, въ которомъ дифферен-



Фиг. 117.

ціаль $d\theta$ исключень съ помощью теоремы площадей $r^2 d\theta = C dt$, таково:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}.$$

Мы имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

Рѣшивъ его относительно $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ и подставивъ вмѣсто постоянной C^2 ея значеніе $\mu a (1 - e^2)$, мы получимъ уравненіе

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu a (1 - e^2)}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

которое мы можемъ написать такъ:

$$\left(r \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{\mu}{a} [-(a-r)^2 + a^2 e^2],$$

отсюда

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}}.$$

Назовемъ черезъ τ моментъ перехода черезъ перигелій; радиусъ-векторъ r , начиная съ момента τ , будетъ сперва увеличиваться, производная $\frac{dr}{dt}$ будетъ положительной, и въ предыдущемъ равенствѣ мы должны будемъ взять знакъ $+$. Этотъ знакъ сохраняется, пока r возрастаетъ отъ своего наименьшаго значенія $r = a - c = a(1 - e)$ до своего наибольшаго значенія $r = a(1 + e)$. Положимъ

$$a - r = ae \cos u,$$

что возможно, такъ какъ по абсолютной величинѣ разность $a - r$ не превосходитъ ae ; въ продолженіе всего періода обращенія уголъ u измѣняется отъ 0 до 2π . Поэтому мы получаемъ уравненіе

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = a(1 - e \cos u) du,$$

которое непосредственно интегрируется и приводитъ къ равенству

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} (t - \tau) = u - e \sin u,$$

ибо при $u = 0$ разность $t - \tau$ также равна нулю. Мы выразили такимъ образомъ t въ функціи переменнй u , которая дана въ функціи отъ r при посредствѣ соотношенія

$$r = a(1 - e \cos u).$$

Если желательно вычислить положеніе движущейся точки въ концѣ времени t , то первое изъ этихъ уравненій дастъ намъ u , а второе даетъ возможность вычислить r .

Введенный нами уголъ u называется эксцентрической аномаліей. Обыкновенно лѣвую часть уравненія, связывающаго t и u , пишутъ въ видѣ $n(t - \tau)$, полагая

$$n = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}};$$

количество $n(t - \tau)$ называется средней аномалией. Такъ какъ найдено было, что

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

то $n = \frac{2\pi}{T}$, гдѣ T есть періодъ обращенія; уравненіе относительно u получаетъ форму :

$$n(t - \tau) = u - e \sin u, \quad (2)$$

изъ которой явствуешь, что коэффиціентъ n долженъ быть равенъ $\frac{2\pi}{T}$: дѣйствительно, правая часть увеличивается на 2π одновременно съ u , т. е. съ каждымъ оборотомъ; коэффиціентъ n называется среднимъ движеніемъ. Полученное нами уравненіе носитъ названіе уравненія Кеплера.

Мы выразили r въ функціи отъ u ; остается выразить истинную аномалію w въ функціи отъ u . Для этой цѣли мы исходимъ изъ уравненія эллипса въ полярныхъ координатахъ

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos w};$$

въ правой части числителемъ служить параметръ p . Приравнивая это значеніе радіуса r найденному выше значенію $a(1 - e \cos u)$, мы получимъ уравненіе

$$1 - e \cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos w},$$

изъ котораго выводятся равенства :

$$1 - \cos w = 2 \sin^2 \frac{w}{2} = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{1 - e \cos u} = \frac{2a(1 + e) \sin^2 \frac{u}{2}}{r},$$

$$1 + \cos w = 2 \cos^2 \frac{w}{2} = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u} = \frac{2a(1 - e) \cos^2 \frac{u}{2}}{r};$$

извлекая изъ обѣихъ частей этихъ равенствъ квадратные корни, мы получимъ формулы:

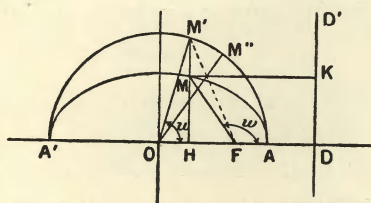
$$\sqrt{r} \sin \frac{w}{2} = \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{u}{2}, \quad \sqrt{r} \cos \frac{w}{2} = \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{u}{2}, \quad (3)$$

которые удобны для вычислений съ помощью логарифмовъ и даютъ r и w въ функции отъ u ; раздѣливъ первую на вторую, получимъ соотношеніе

$$\operatorname{tang} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{u}{2}, \quad (4)$$

которое связываетъ истинную аномалію съ эксцентрической.

Геометрическій методъ. — Чтобы опредѣлить положеніе планеты на ея орбитѣ въ моментъ t , можно воспользоваться геометрическимъ методомъ, раскрывающимъ значеніе переменныхъ, кото-



Фиг. 118.

рыми мы выше пользовались. Извѣстно, что эллипсъ можно разсматривать, какъ проекцію его гомографической окружности, повернутой вокругъ большой оси AA' (фиг. 118) на уголъ, косинусъ котораго равенъ $\frac{b}{a}$. Пусть M будетъ точка эллипса и M' — соотвѣтственная точка гомографической окружности. Тогда

$$\text{площадь } MFA = \frac{b}{a} \text{ площадь } M'FA;$$

уголъ $MFA = w$ мы выше назвали истинной аномаліей; уголъ $M'OA$ есть эксцентрическая аномалія u . Дѣйствительно, секторъ $M'FA$ имѣетъ площадь

$$M'FA = M'OA - M'OF = \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} a^2 e \sin u = \frac{a^2}{2} (u - e \sin u);$$

слѣдовательно,

$$MFA = \frac{ab}{2} (u - e \sin u);$$

площадь этого сектора пропорциональна времени t , въ теченіе котораго онъ описывается. Поэтому, обозначивъ это время черезъ $t - \tau$ и періодъ обращенія черезъ T , мы должны будемъ имѣть равенство

$$\frac{\text{площадь } MFA}{t - \tau} = \frac{\pi ab}{T};$$

подставивъ вмѣсто площади MFA ея значеніе, мы получимъ:

$$\frac{\frac{ab}{2} (u - e \sin u)}{t - \tau} = \frac{\pi ab}{T},$$

или

$$\frac{2\pi}{T} (t - \tau) = u - e \sin u;$$

положивъ $n = \frac{2\pi}{T}$, мы придемъ къ уравненію Кеплера

$$u - e \sin u = n (t - \tau).$$

Чтобы найти геометрическое значеніе средней аномаліи $n (t - \tau)$, представимъ себѣ движущееся тѣло, выходящее изъ A одновременно съ планетой и описывающее равномернымъ движеніемъ географическую окружность такъ, что въ точку A' тѣло приходитъ одновременно съ планетой. Въ моментъ t это движущееся тѣло будетъ въ точкѣ M'' ; уголъ $\zeta = M''OA$ будетъ средней аномаліей; дѣйствительно,

$$\zeta = \frac{2\pi}{T} (t - \tau) = n (t - \tau).$$

Что касается выраженія r въ функціи отъ u , то мы найдемъ его, основываясь на томъ, что отношеніе разстояній гочки эллипса отъ фокуса F и отъ соотвѣтственной директриссы DD' равно e . Слѣдовательно,

$$r = e \overline{MK} = e (OD - \overline{OH}) = e \left(\frac{a}{e} - a \cos u \right) = a (1 - e \cos u),$$

ибо разстояніе OD директриссы отъ центра равно $\frac{a}{e}$.

169. Рѣшеніе уравненія Кеплера. — Чтобы вычислить положеніе планеты въ моментъ t , нужно сперва вычислить эксцентрическую аномалію u съ помощью уравненія Кеплера:

$$u = \zeta + e \sin u \quad [\zeta = n (t - \tau)]; \quad (1)$$

затѣмъ мы получимъ другія координаты, которыя всѣ будутъ выражены въ функціи отъ u . Какова бы ни была дуга ζ , уравненіе (1) Кеплера

допускаетъ одинъ корень, который мы обозначимъ черезъ u . Действительно, значеніе ζ заключено между двумя цѣлыми кратными числа π :

$$k\pi < \zeta < (k+1)\pi.$$

Положивъ $u = k\pi$ въ функціи $\varphi(u) = u - e \sin u - \zeta$, мы найдемъ, что

$$\varphi(k\pi) = k\pi - \zeta < 0,$$

тогда какъ

$$\varphi[(k+1)\pi] = (k+1)\pi - \zeta > 0.$$

Мы видимъ, что между $(k+1)\pi$ и $k\pi$ всегда содержится вещественный корень. Этотъ корень будетъ единственнымъ, ибо производная $\varphi'(u) = 1 - e \cos u$ всегда имѣетъ положительное значеніе, такъ какъ значеніе e содержится между 0 и 1.

Этотъ единственный вещественный корень можно вычислить по методу послѣдовательныхъ приближеній слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ эксцентриситетъ e планетной орбиты малъ, то мы можемъ сначала пренебречь членомъ $e \sin u$ и взять для неизвѣстной u приближенное значеніе $u_0 = \zeta$. Затѣмъ мы беремъ

$$\begin{aligned} u_1 &= e \sin u_0 + \zeta, \\ u_2 &= e \sin u_1 + \zeta, \\ &\dots\dots\dots \\ u_{i+1} &= e \sin u_i + \zeta. \end{aligned}$$

Полученныя такимъ образомъ числа $u_1, u_2, \dots, u_n$ стремятся къ искомому корню u , какъ къ предѣлу; можно строго доказать, что

$$\text{модуль } (u_n - u) \leq e^{n+1}$$

(см. „Traité de Mécanique“, n° 239).

170. Параболическое движеніе кометъ. — Представимъ себѣ комету, описывающую дугу параболы, фокусомъ которой служить центръ солнца, какъ это имѣетъ мѣсто для большинства кометъ. Обозначая черезъ w уголъ, составленный радіусомъ-векторомъ $SM = r$ съ радіусомъ-векторомъ SA перигелия, мы имѣемъ:

$$r = \frac{p}{1 + \cos w} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{w}{2}}.$$

Интегралъ площадей даетъ уравненіе

$$r^2 dw = C dt = \sqrt{f(M+m)} p dt,$$

гдѣ m обозначаетъ массу кометы и M — массу солнца. Дѣйствительно, изъ рѣшенной нами задачи о двухъ тѣлахъ слѣдуетъ, что комета движется вокругъ солнца такъ, какъ если бы солнце было неподвижнымъ и притягивало комету съ силой, равной

$$-\frac{f(M+m)m}{r^2} = -\frac{\mu m}{r^2}.$$

Въ такомъ случаѣ постоянная площадей $C = \sqrt{\mu p} = \sqrt{f(M+m)} p$.
Слѣдовательно,

$$\frac{2 \sqrt{f(M+m)}}{p^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{dw}{2 \cos^2 \frac{w}{2}} = \left(1 + \tan^2 \frac{w}{2} \right) d \tan \frac{w}{2},$$

откуда, интегрируя и обозначая черезъ τ моментъ перехода черезъ перигелій, найдемъ, что

$$\frac{2 \sqrt{f(M+m)}}{p^{\frac{3}{2}}} (t - \tau) = \tan \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w}{2}.$$

Таково уравненіе третьей степени относительно $\tan \frac{w}{2}$, которое нужно рѣшить для того, чтобы имѣть положеніе кометы въ моментъ t . Это уравненіе имѣетъ лишь одинъ вещественный корень. Положивъ $p = 2q$ и замѣчая, что вмѣсто $\sqrt{M+m}$ можно взять $\sqrt{M}$, такъ какъ масса m весьма мала въ сравненіи съ массой солнца, мы напомнимъ полученное уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{t - \tau}{q^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{fM}} \left(\tan \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w}{2} \right).$$

Составлены числовыя таблицы, дающія корень этого уравненія для ряда значеній правой части, при чемъ масса M солнца взята за единицу.

VI. — ДВИЖЕНІЕ НАЭЛЕКТРИЗОВАННОЙ ЧАСТИЦЫ ВЪ ДАННОМЪ ПОЛѢ.

171. Уравненія движенія. — Положимъ, что электрическое и магнитное поля наложены одно на другое (п. 80), и рассмотримъ наэлектризованную матеріальную частицу массы m , несущую за-

рядъ q . Требуется найти движеніе этой частицы, предполагая, что она брошена съ нѣкоторой начальной скоростью. Эта задача представляетъ большой интересъ въ теоріи катодныхъ лучей и въ попыткахъ объяснить свѣрныя сіянія.

Пусть

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

будутъ проекціи дѣйствія электрическаго поля на единицу электрической массы; проекціи силы, дѣйствующей на электрическую массу q будутъ qX , qY , qZ .

Съ другой стороны, пусть

$$(\varphi) \quad P = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial W}{\partial z}$$

будутъ проекціи дѣйствія φ магнитнаго поля на единицу свѣрной магнитной массы. Мы допускаемъ, что можно слѣдующимъ образомъ опредѣлить дѣйствіе F этого поля на частицу m , несущую электрическій зарядъ, равный положительной единицѣ, и обладающую скоростью V , проекціи которой суть $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Изъ точки m , какъ начала, проводимъ два вектора V и φ ; сила F равна произведенію $\varphi V \sin(\varphi, V)$ и направлена перпендикулярно къ плоскости $\varphi m V$ въ сторону, указываемую правиломъ Ампера. Другими словами, эта сила F геометрически равна моменту вектора φ около конца вектора V ; если оси ориентированы такимъ образомъ, какъ въ п. 11, то проекціи этой силы равны

$$(F) \quad Q \frac{dz}{dt} - R \frac{dy}{dt}, \quad R \frac{dx}{dt} - P \frac{dz}{dt}, \quad P \frac{dy}{dt} - Q \frac{dx}{dt}.$$

Если движущаяся частица m несетъ вмѣсто положительной единицы электрической массы количество электричества q , то дѣйствіе на нее магнитнаго поля равно силѣ F , умноженной на q .

Сообразно съ этимъ уравненія движенія частицы m будутъ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= q \frac{\partial U}{\partial x} + q \left(Q \frac{dz}{dt} - R \frac{dy}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= q \frac{\partial U}{\partial y} + q \left(R \frac{dx}{dt} - P \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= q \frac{\partial U}{\partial z} + q \left(P \frac{dy}{dt} - Q \frac{dx}{dt} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ P , Q , R имѣютъ значенія (φ). Эти уравненія могутъ быть интегрированы лишь для нѣкоторыхъ частныхъ полей. Можно, однако, замѣтить, что теорема живыхъ силъ даетъ одинъ первый интегралъ. Дѣйствительно, если умножить уравненія (1) соответственно на dx , dy , dz и затѣмъ сложить, то члены, обусловленные магнитнымъ полемъ, исчезнутъ, и мы получимъ

$$d \frac{mv^2}{2} = q dU, \quad mv^2 = 2qU + h. \quad (2)$$

Тотъ фактъ, что работа силы магнитнаго поля равна нулю, геометрически очевиденъ, ибо эта сила перпендикулярна къ скорости движущейся частицы.

Частный случай: электрическое поле и магнитное поле оба однородны. — Въ этомъ случаѣ обѣ силы $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ и P , Q , R постоянны по величинѣ и направленію; ихъ проекціи постоянны.

Возьмемъ ось Oz , параллельную направленію магнитнаго поля; проекціи P и Q будутъ тогда равны нулю, проекція R будетъ постоянной, и уравненія движенія, раздѣленные на m , примутъ слѣдующій видъ:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= a - ky', \\ y'' &= b + kx', \\ z'' &= c, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

при чемъ ударенія обозначаютъ производныя по t ; a , b , c и k соответственно представляютъ умноженные на $\frac{q}{m}$ проекціи электрическаго поля на оси и проекцію магнитнаго поля на ось Oz .

Если бы магнитное поле было равно нулю ($k = 0$), то ускореніе частицы было бы постоянно по величинѣ и направленію: она совершала бы параболическое движеніе, аналогичное движенію тяжелой точки въ пустотѣ.

Предположимъ, что $k \neq 0$. Первое интегрированіе даетъ непосредственно

$$\left. \begin{aligned} x' &= at - ky + \alpha, \\ y' &= bt + kx + \beta, \\ z' &= ct + \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

гдѣ α, β, γ — произвольныя постоянныя. Подставимъ въ первое изъ уравненій (3) значеніе y' , выведенное изъ второго изъ уравненій (4); мы получимъ для опредѣленія x линейное уравненіе

$$x'' + k^2x = \alpha - k\beta - kbt$$

съ постоянными коэффиціентами и со второю частью, линейною относительно t .

Общій интегралъ уравненія безъ второй части равенъ

$$A \cos(kt + \lambda),$$

гдѣ A и λ обозначаютъ двѣ произвольныя постоянныя; выраженіе

$$\frac{\alpha - k\beta - kbt}{k^2}$$

есть частное рѣшеніе уравненія; слѣдовательно, общій интегралъ, дающій x , будетъ:

$$x = A \cos(kt + \lambda) + \frac{\alpha - k\beta - kbt}{k^2}. \quad (5)$$

Теперь мы подставляемъ значеніе x' , выведенное изъ уравненія (5), въ первое изъ уравненій (4) и опредѣляемъ y ; мы получимъ:

$$y = A \sin(kt + \lambda) + \frac{b + k\alpha + kat}{k^2}. \quad (6)$$

Наконецъ, третье изъ уравненій (4) непосредственно даетъ:

$$z = \frac{1}{2} ct^2 + \gamma t + z_0. \quad (7)$$

Формулы (5), (6) и (7) даютъ уравненія движенія частицы въ конечномъ видѣ. Ихъ можно интерпретировать слѣдующимъ образомъ.

Положимъ

$$(C_1) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\alpha - k\beta - kbt}{k^2}, \\ y_1 = \frac{b + k\alpha + kat}{k^2}, \\ z_1 = \frac{1}{2} ct^2 + \gamma t + z_0. \end{cases}$$

<http://mathesis.ru>

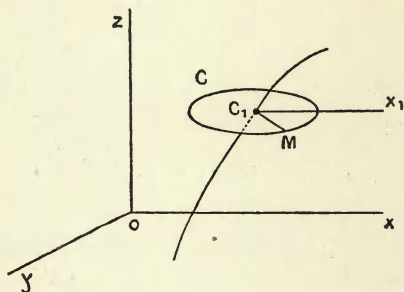
Определенная такимъ образомъ точка C_1 описываетъ параболу съ вертикальной осью, подобно тяжелой точкѣ: дѣйствительно, ускореніе точки C_1 имѣетъ проекціи

$$x_1'' = 0, \quad y_1'' = 0, \quad z_1'' = c.$$

Значенія x, y, z мы можемъ теперь написать въ такомъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + A \cos(kt + \lambda), \\ y &= y_1 + A \sin(kt + \lambda), \\ z &= z_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Разсмотримъ окружность C (фиг. 119), которая описана постояннымъ радіусомъ A изъ точки $C_1(x_1, y_1, z_1)$, какъ изъ центра,



Фиг. 119.

и плоскость которой остается параллельной плоскости xOy . Пусть эта окружность обладает параболическимъ поступательнымъ движениемъ, определяемымъ уравненіями (C_1). Предположимъ далѣе, что нѣкоторая точка M описываетъ эту окружность, двигаясь равномерно съ угловой скоростью k такимъ образомъ, что уголъ прямой C_1M съ прямой C_1x_1 , параллельной оси Ox , равенъ $(kt + \lambda)$. Эта точка M имѣетъ относительно осей движение, вполне тождественное искомому, потому что ея координаты даются формулами (8). Такимъ образомъ, движение точки является результирующимъ двухъ движений: по параболѣ съ осью, параллельной направленію магнитнаго поля, и равномернаго движения по окружности, плоскость которой перпендикулярна къ этому направленію.

Частный случай. — Если $c = 0$, т. е. если электрическое поле перпендикулярно къ магнитному полю, то точка $C_1(x_1, y_1, z_1)$ обла-

даетъ равномернымъ прямолинейнымъ движениемъ; движенье точки M состоитъ тогда изъ равномернаго прямолинейнаго движенья, сложеннаго съ равномернымъ круговымъ.

Если электрическое поле равно нулю, т. е. $a = b = c = 0$, то центръ C_1 окружности C совершаетъ равномерное движенье по прямой, параллельной оси Oz ; траекторіей частицы служить винтовая линія.

VII. — ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО КРИВОЙ.

172. — Уравненія движенья. — Пусть C будетъ кривая, которая можетъ съ теченіемъ времени измѣнять свое положеніе и даже форму. Уравненія этой кривой, отнесенныя къ неподвижнымъ осямъ, будутъ

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad f_1(x, y, z, t) = 0. \quad (1)$$

Въ частномъ случаѣ, когда кривая неподвижна, эти уравненія не содержатъ явно времени t , и мы имѣемъ тождественно $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$. На этой кривой движется безъ тренія матеріальная точка массы m , имѣющая координаты x, y, z и находящаяся подъ дѣйствіемъ силъ, равнодѣйствующая которыхъ F имѣетъ проекціи X, Y, Z . Кривая производитъ на эту точку нормальную реакцію N , проекціями которой служатъ количества (п. 86) слѣдующаго вида:

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}. \quad (N)$$

Мы можемъ поэтому разсматривать эту точку, какъ свободную и находящуюся подъ дѣйствіемъ двухъ силъ F и N ; уравненія движенья будутъ

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти уравненія вмѣстѣ съ уравненіями (1) кривой, составляютъ систему пяти уравненій, опредѣляющихъ въ функции отъ t координаты x, y, z , т. е. движенье, и множители λ_1 и λ_2 , т. е. реакцію.

Мы не приведемъ примѣра примѣненія этого метода къ случаю подвижной кривой; почти всегда будетъ удобнѣе воспользоваться уравненіями Лагранжа или теоріей относительныхъ движеній.

173. Случай неподвижной кривой. — Когда кривая неподвижна, общій методъ можетъ быть упрощенъ. Такъ какъ положеніе движущейся точки на кривой зависитъ отъ одного лишь параметра, то для опредѣленія движенія достаточно одного уравненія, не содержащаго реакціи. Это уравненіе дается теоремой живыхъ силъ въ такомъ видѣ:

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz; \quad (3)$$

реакція N не входитъ въ это уравненіе, потому что эта реакція нормальна къ перемѣщенію и потому не производитъ никакой работы.

Къ этому же результату можно придти и аналитическимъ путемъ. Умноживъ обѣ части каждаго изъ уравненій (2) соотвѣтственно на dx , dy , dz и сложивъ, мы получимъ:

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) + \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right)$$

Уравненія (1) не содержатъ явно t , потому что кривая неподвижна; въ виду этого дифференцированіе ихъ даетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz = 0,$$

и потому предыдущее уравненіе приводится къ уравненію (3). Замѣтимъ, что реакція не исчезнетъ въ уравненіи живыхъ силъ, если кривая будетъ подвижной; уравненія (1) содержатъ тогда явно t , и въ этомъ случаѣ дифференцированіе даетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt = 0;$$

уравненіе живыхъ силъ будетъ тогда:

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz + \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} dt.$$

Геометрически это вытекает из того, что действительное перемещение точки не происходит по касательной к материальной кривой в положении ее в момент t , и потому работа реакции отлична от нуля.

Чтобы выполнить вычисление, мы выразим координаты точек кривой в функции некоторого параметра q :

$$x = \varphi(q), \quad y = \psi(q), \quad z = \omega(q);$$

имеем теперь:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2 + \omega'^2) \left(\frac{dq}{dt}\right)^2, \quad (4)$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = (X\varphi' + Y\psi' + Z\omega')dq = Qdq, \quad (5)$$

гдѣ Q обозначаетъ количество $X\varphi' + Y\psi' + Z\omega'$. Въ самомъ общемъ случаѣ, который можетъ встрѣтиться, сила зависитъ одновременно отъ положенія движущейся точки, отъ ее скорости и отъ времени. Составляющія X , Y , Z , а также количество Q , будутъ тогда функциями отъ q , $\frac{dq}{dt}$, t , и уравненіе (3) будетъ дифференціальнымъ уравненіемъ второго порядка, которое дастъ намъ параметръ q въ функции отъ t .

Въ частномъ случаѣ, когда сила зависитъ лишь отъ положенія движущейся точки, количество Q есть функція одного лишь параметра q , и интегрированіе уравненія движенія приводится къ квадратурамъ. Дѣйствительно, уравненіе (3) даетъ:

$$d \frac{mv^2}{2} = Qdq, \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{q_0}^q Qdq,$$

гдѣ индексъ 0 указываетъ начальныя значенія. Подставивъ въ послѣднее уравненіе вмѣсто v^2 его значеніе изъ уравненія (4), мы получимъ:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = f(q), \quad \frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{f(q)},$$

$$dt = \frac{dq}{\pm \sqrt{f(q)}}, \quad t - t_0 = \pm \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{f(q)}}.$$

Извѣстно, какой слѣдуетъ взять знакъ въ началѣ движенія, ибо направление начальной скорости опредѣляетъ знакъ начального зна-

ченія $\frac{dq}{dt}$; этотъ знакъ сохраняется, пока производная $\frac{dq}{dt}$ не обращается въ нуль. Если $\frac{dq}{dt}$ обратится въ нуль по истеченіи нѣкотораго времени, то и скорость обратится въ нуль; направленіе движенія и вмѣстѣ съ тѣмъ знакъ, который нужно взять передъ $\frac{dq}{dt}$, опредѣляется тогда направленіемъ тангенціальной составляющей силы.

Если существуетъ силовая функція $U(x, y, z)$, первый интегралъ получается непосредственно:

$$\frac{mv^2}{2} = U(x, y, z) + h;$$

чтобы окончить вычисленіе, слѣдуетъ замѣнить, какъ въ предыдущемъ случаѣ, значенія x, y, z ихъ выраженіями въ функціи параметра q .

174. Нормальная реакція. — Когда движеніе уже извѣстно по уравненію живыхъ силъ, то два какихъ-либо изъ уравненій (2) или двѣ ихъ комбинаціи дадутъ намъ λ и λ_1 , т. е. нормальную реакцію.

Когда кривая неподвижна, то можно воспользоваться внутренними уравненіями движенія. Неподвижная кривая, по которой должна двигаться точка, есть траекторія, описываемая этой точкой подъ дѣйствіемъ силъ F и N . Поэтому, написавъ внутреннія уравненія движенія, мы будемъ имѣть (п. 144):

$$F_t = m \frac{dv}{dt}, \quad F_n + N_n = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_B + N_B = 0. \quad (6)$$

Первое изъ этихъ уравненій, не зависящее отъ реакціи, даетъ движеніе по кривой; послѣ этого два другихъ даютъ составляющія N_n и N_b нормальной реакціи.

Вычисленіе упрощается, когда существуетъ силовая функція. Тогда уравненіе живыхъ силъ будетъ

$$\frac{mv^2}{2} = U + h;$$

подставивъ получающееся отсюда значеніе mv^2 во второе изъ уравненій (6), мы можемъ опредѣлить реакцію, не зная выраженій координатъ x, y, z въ функціи отъ t .

Первое изъ уравненій (6) есть не что иное, какъ уравненіе живыхъ силъ. Дѣйствительно, мы можемъ написать его въ видѣ

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{mv^2}{2},$$

или, наконецъ, въ видѣ

$$X dx + Y dy + Z dz = d \frac{mv^2}{2}.$$

Оно показываетъ, что выраженіе дуги s въ функціи отъ t не измѣняется, если деформировать кривую, не измѣняя ея длины, и измѣнять силу, оставляя неизмѣнной ея тангенціальную составляющую. Отъ этого измѣнится лишь нормальная реакція. Въ частности мы можемъ такимъ образомъ, не измѣняя закона движенія, преобразовать кривую въ прямую линію и свести задачу къ вопросу о прямолинейномъ движеніи⁸⁰⁾.

175. Движеніе тяжелой точки по неподвижной кривой. — Разсмотримъ случай, когда F есть сила тяжести.

Возьмемъ три прямоугольныя оси и направимъ ось z -овъ вертикально вверхъ. Такъ какъ проекціи силы равны

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg,$$

то элементарная работа вѣса будетъ $-mg dz$, и уравненіе живыхъ силъ даетъ

$$\frac{v^2}{2} = -gz + h; \tag{7}$$

если положить

$$h = ag,$$

то

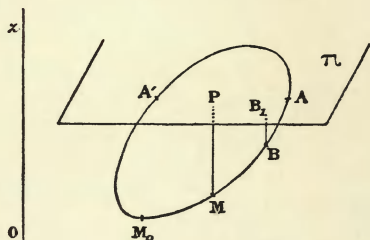
$$v^2 = 2g(a - z). \tag{7'}$$

Разсмотримъ плоскость Π , имѣющую уравненіе $z = a$. Разстояніе MP (фиг. 120) движущейся точки отъ этой плоскости равно $a - z$, такъ что скорость точки опредѣляется соотношеніемъ

$$v^2 = 2g \cdot PM.$$

Слѣдовательно, численное значеніе этой скорости таково же, какъ если бы точка, не обладая начальной скоростью, упала изъ P въ M .

Предположимъ, что разсматриваемая кривая замкнута; при этомъ могутъ представиться два случая въ зависимости отъ того, пересѣкается ли кривая плоскостью Π или не пересѣкается. Каково



Фиг. 120.

бы ни было начальное положеніе M_0 движущейся точки, мы всегда можемъ бросить ее со скоростью v_0 , достаточно большою для того, чтобы плоскость Π была на желаемой нами высотѣ, ибо

$$a = \frac{v_0^2}{2g} + z_0.$$

Мы можемъ, слѣдовательно, предположить, что скорость v_0 настолько велика, что плоскость Π лежитъ выше кривой, не пересѣкая ее. Уравненіе (7') показываетъ тогда, что скорость никогда не обращается въ нуль ³¹⁾; слѣдовательно, движущаяся точка будетъ неопредѣленно долго обращаться по своей траекторіи. Движеніе будетъ періодическимъ; наибольшая скорость соответствуетъ наинизшему положенію движущейся точки, а наименьшая скорость — наивысшему.

Теперь допустимъ, что плоскость Π пересѣкаетъ кривую. Пусть A и A' будутъ два послѣдовательныхъ пересѣченія, между которыми находится начальное положеніе. Предположимъ, что движущаяся точка брошена изъ самой низшей точки M_0 дуги AA' по направленію къ концу A , и будемъ отсчитывать дуги s отъ точки M_0 въ сторону M_0A . Движущаяся точка можетъ достигнуть положенія, сколь угодно близкаго къ точкѣ A . Дѣйствительно, пусть BB_1 будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки B на плоскость Π ; тогда скорость между точками M_0 и B постоянно остается больше, чѣмъ $\sqrt{2g \cdot BB_1}$, такъ что движущаяся точка всегда достигаетъ положенія B .

Докажемъ это аналитически. Въ силу соотношенія (7'), гдѣ $v = \frac{ds}{dt}$, имѣемъ:

$$\sqrt{2g} dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{a-z}}.$$

Будемъ отсчитывать дуги отъ точки M_0 , а время — отъ начальнаго момента; такъ какъ дуга s возрастаетъ вмѣстѣ съ временемъ t , то мы должны взять въ предыдущемъ уравненіи знакъ $+$, при чемъ получится:

$$\sqrt{2g} t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{a-z}}. \quad (8)$$

Такъ какъ элементъ интеграла остается конечнымъ между M_0 и B ($z \neq a$), то движущаяся точка достигнетъ положенія B черезъ конечный промежутокъ времени.

Если касательная въ точкѣ A не направлена горизонтально, то движущаяся точка достигнетъ положенія A . Въ самомъ дѣлѣ, предыдущее уравненіе можно представить въ видѣ:

$$\sqrt{2g} t = \int_{z^0}^z \frac{ds}{dz} \frac{1}{\sqrt{a-z}} dz.$$

Когда касательная въ точкѣ A не направлена горизонтально, то производная $\frac{ds}{dz}$ остается конечной при $z = a$, и элементъ интеграла обращается въ безконечность порядка $\frac{1}{2}$; слѣдовательно, интегралъ остается конечнымъ, когда z стремится къ a . Движущаяся точка достигнетъ положенія A по истеченіи времени T , определяемаго равенствомъ

$$\sqrt{2g} T = \int_{z^0}^a \frac{ds}{dz} \frac{1}{\sqrt{a-z}} dz.$$

Достигнувъ конца A , движущаяся точка начнетъ опускаться обратно къ точкѣ M_0 , при чемъ скорость выразится черезъ

$$\frac{ds}{dt} = - \sqrt{2g(a-z)};$$

движущаяся точка проходитъ при этомъ черезъ каждую точку дуги AM_0 со скоростью, равной и противоположной той, которую она имѣла въ той же точкѣ при поднятіи. Движущаяся точка достигаетъ положенія M_0 черезъ промежутокъ времени T послѣ вы-

хода изъ A , затѣмъ она подымается отъ M_0 до A' за промежутокъ времени T_1 , и т. д. Точка совершаетъ, слѣдовательно, колебательное движеніе между точками A и A' , при чемъ періодъ простого колебанія равенъ $T + T_1$.

Частный случай, когда касательная въ точкѣ A горизонтальна. — Возвратимся къ формулѣ, дающей время при движеніи отъ M_0 къ A :

$$\sqrt{2g}t = \int_{z_0}^z \frac{ds}{dz} \frac{1}{\sqrt{a-z}} dz.$$

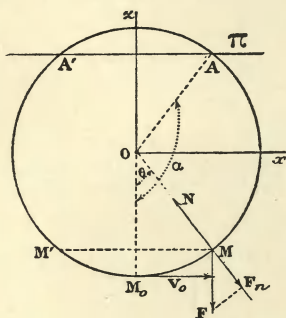
Когда z стремится къ a , то s стремится къ предѣлу, равному длинѣ l дуги M_0A , а дробь $\frac{1}{\sqrt{a-z}}$ и производная $\frac{ds}{dz}$ безпредѣльно возрастаютъ. Принявъ s за независимую переменную, мы будемъ имѣть:

$$\sqrt{2g}t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{a-z}}.$$

Пусть λ будетъ порядокъ бесконечно малой $a - z$ относительно бесконечно малой $s - l$ вблизи $s = l$; по отношенію къ бесконечно большой $\frac{1}{s-l}$; элементъ интеграла будетъ бесконечно большой величиной порядка $\frac{\lambda}{2}$; если $\frac{\lambda}{2} \geq 1$, то интеграль, дающій время t , безпредѣльно возрастаетъ; если же $\frac{\lambda}{2} < 1$, то интеграль сохраняетъ конечное значеніе. Первый случай имѣетъ мѣсто для обыкновенной точки, гдѣ $\lambda = 2$, въ чемъ мы можемъ убѣдиться, если развернемъ переменную z , рассматриваемую, какъ функцію отъ s , по строкѣ Тэйлора вкругъ точки $s=l$ и примемъ во вниманіе, что для $s = l$ производная $\frac{dz}{ds}$ предполагается равной нулю ³²). Вторымъ случай можетъ представиться въ точкѣ возврата, гдѣ вообще $\lambda = \frac{3}{2}$. Итакъ, если A есть обыкновенная точка, въ которой касательная къ кривой направлена горизонтально, то движущаяся точка безпредѣльно приближается къ точкѣ A , никогда ея не достигая. Если же A есть точка возврата, то движущаяся точка можетъ достигнуть ея со скоростью, равной нулю, и остаться въ этомъ положеніи равновѣсія.

176. Простой (математическій) маятникъ. — Простой маятникъ состоитъ изъ тяжелой матеріальной точки, которая движется безъ тренія по окружности радіуса l , расположенной въ вертикальной плоскости.

Возьмемъ координатныя оси, указанныя на фиг. 121, и пред-



Фиг. 121.

положимъ, что движущаяся точка брошена изъ низшаго положенія M_0 ($z = -l$) съ начальной скоростью v_0 ; теорема живыхъ силъ даетъ:

$$v^2 = 2g(a - z), \text{ при чемъ } a = -l + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Если обозначимъ черезъ θ уголъ M_0OM , составляемый маятникомъ съ вертикальной прямой, направленной внизъ, то

$$v = l \frac{d\theta}{dt}, \quad z = -l \cos \theta;$$

предыдущее уравненіе обращается въ

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g(a + l \cos \theta),$$

откуда

$$t = l \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2g(a + l \cos \theta)}}.$$

Мы должны различать три случая въ зависимости отъ положенія прямой Π ($z = a$) относительно окружности.

1° Разберемъ подробно случай, имѣющій фундаментальное значеніе въ физикѣ, а именно случай, когда прямая Π пересѣкаетъ окружность въ двухъ точкахъ A и A' , т. е. когда $a < l$, $v_0 < 2\sqrt{gl}$

Какъ мы видѣли, въ этомъ случаѣ движущаяся точка совершаетъ колебанія между точками A и A' . Пусть α будетъ уголъ наибольшаго отклоненія, т. е. $\alpha = M_0OA$; мы имѣемъ:

$$a = -l \cos \alpha,$$

и уравненіе живыхъ силъ преобразуется въ слѣдующее:

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2gl (\cos \theta - \cos \alpha),$$

что можно написать и такъ:

$$l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 4g \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

откуда

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = \frac{d\theta}{2 \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

Мы беремъ знакъ $+$, предполагая, что движущаяся точка поднимается. Считая время отъ момента, когда точка выходитъ изъ M_0 , мы будемъ имѣть:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^{\theta} \frac{d \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

Положивъ

$$\sin \frac{\theta}{2} = u \sin \frac{\alpha}{2}, \quad k = \sin \frac{\alpha}{2},$$

мы получимъ:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Такимъ образомъ, мы пришли къ эллиптическому интегралу. Чтобы найти время T , въ теченіе котораго движущаяся точка переходитъ изъ положенія M_0 въ точку A , нужно измѣнять уголъ θ отъ 0 до α , или перемѣнную u отъ 0 до 1; положивъ

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

мы будемъ имѣть:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} T = K, \quad T = K \sqrt{\frac{l}{g}},$$

и продолжительность простого колебанія будетъ равна

$$2K \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Полезно имѣть разложеніе выраженія для T по степенямъ $\sin \frac{\alpha}{2}$, т. е. разложеніе выраженія K по степенямъ k . Съ этой цѣлью мы напишемъ по формулѣ бинорма Ньютона:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}} &= (1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2u^2 + \frac{1.3}{2.4} k^4u^4 + \dots \\ &+ \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{2.4.6 \dots 2n} k^{2n}u^{2n} + \dots \end{aligned}$$

Коэффициентъ при k^{2n} въ разложеніи выраженія K будетъ, слѣдовательно, имѣть множителемъ интегралъ

$$\varphi(n) = \int_0^1 \frac{u^{2n} du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Прежде всего очевидно, что $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$; далѣе, изъ тождества

$$d(u^{2n-1} \sqrt{1-u^2}) = (2n-1) \frac{u^{2n-2} du}{\sqrt{1-u^2}} - 2n \frac{u^{2n} du}{\sqrt{1-u^2}},$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число, получимъ, интегрируя отъ 0 до 1,

$$\varphi(n) = \frac{2n-1}{2n} \varphi(n-1).$$

Полагая послѣдовательно $n = 1, 2, 3, \dots$, n и перемножая почленно полученныя формулы, найдемъ, что

$$\varphi(n) = \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{2.4.6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

Для K мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующее разложеніе

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots \right],$$

и, следовательно,

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \dots \right].$$

Въ случаѣ безконечно малыхъ колебаній можно пренебречь величиной $\sin \frac{\alpha}{2}$; такимъ образомъ получается извѣстная формула:

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Въ случаѣ колебаній съ малой амплитудой можно замѣнить $\sin \frac{\alpha}{2}$ черезъ $\frac{\alpha}{2}$ и взять лишь первые два члена разложенія:

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right).$$

2° Разсмотримъ теперь случай, когда прямая Π не пересѣкаетъ окружности, т. е. когда $a > l$, $v_0 > 2 \sqrt{gl}$. Уравненіе живыхъ силъ можно написать такъ:

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g(a + l \cos \theta) = 2g \left(a + l - 2l \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

откуда, полагая

$$k^2 = \frac{2l}{a+l}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2g(a+l)}}{l},$$

найдемъ, что

$$\lambda t = \int_0^{\theta} \frac{d \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

Если мы сдѣлаемъ замѣну переменнѣй, полагая $u = \sin \frac{\theta}{2}$, то время будетъ опредѣляться интеграломъ такого же вида, какъ и въ предыдущемъ случаѣ:

$$\lambda t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

3° Въ промежуточномъ случаѣ, когда прямая Π касается данной окружности, т. е. когда $a = l$, $v_0 = 2 \sqrt{gl}$, интегрирование можно выполнить при помощи показательныхъ функций. Уравнение живыхъ силъ въ этомъ случаѣ даетъ

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g(l + l \cos \theta) = 4gl \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = \frac{d \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}};$$

интегрируя, получимъ :

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \log \tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Постоянная интеграла равна нулю, потому что при $\theta = 0$ значение t должно быть нулемъ. Написавъ послѣднюю формулу въ видѣ

$$\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t},$$

мы найдемъ результатъ, извѣстный намъ изъ разсмотрѣнія общаго случая: при безпредѣльномъ возрастаніи t уголъ θ возрастаетъ, стремясь къ предѣлу π , и движущаяся точка безпредѣльно приближается къ наивысшей точкѣ, никогда ея не достигая. Эта наивысшая точка есть обыкновенная точка съ горизонтальной касательной.

Вычисленіе реакціи. — Реакція въ каждой точкѣ направлена по радіусу круга; она считается положительной въ сторону центра и отрицательной — въ противоположную сторону. Пусть N будетъ ея алгебраическое значеніе; оно опредѣляется изъ второго внутренняго уравненія движенія

$$F_n + N = \frac{mv^2}{l};$$

дѣйствительно, мы имѣемъ здѣсь (фиг. 121)

$$F_n = -mg \cos \theta = \frac{mgz}{l};$$

съ другой стороны,

$$v^2 = 2g(a - z),$$

а радиус кривизны ρ равен длине l маятника; следовательно,

$$N = \frac{2mg(a-z)}{l} - \frac{mgz}{l},$$

$$N = \frac{mg}{l}(2a - 3z).$$

Отсюда видно, что реакция убывает при поднятии точки на окружности, а ее наибольшее значение, существенно положительное, соответствует самой низкой точке. Эта реакция обращается в нуль и изменяет свой знак в точках пересечения окружности с прямою $z = \frac{2a}{3}$.

Представим себе, что точка брошена в круговую трубку; из предыдущего следует, что точка давит на внешнюю стенку трубки, когда реакция имеет положительное значение, и давит на внутреннюю стенку, если $N < 0$. Чаще всего движущаяся точка бывает соединена посредством гибкой нити с неподвижной точкой O . Пока реакция будет положительной, нить остается натянутой; когда же реакция, пройдя через значение нуль, становится отрицательной, то точка стремится приблизиться к центру, и нить уже не может удержать ее на окружности. Если мы при этом не будем принимать во расчет массы и упругости нити, то найдем, что точка покидает окружность и свободно перемещается под действием своего веса: она описывает параболу, сопряженную с окружностью. В точке касания обеих кривых эти кривые имеют общий круг кривизны; действительно, скорость движущейся точки, равно как и действующая на нее сила, постоянно изменяются непрерывно; внутреннее уравнение, которым определяется $\frac{mv^2}{\rho}$, показывает, следовательно, что радиус кривизны также изменяется непрерывно, и потому обе кривые соприкасаются в точке касания. Парабола, ось которой вертикальна, вполне определяется требованием, чтобы в рассматриваемой точке она соприкасалась с данной окружностью.

Найдем теперь, каким условиям должны быть подчинены наши данные для того, чтобы движущаяся точка оставила окружность или не оставляла ее. Рассмотрим прямые $\Delta(z = \frac{2a}{3})$ и $\Pi(z = a)$. Если $a < 0$, то реакция никогда не обращается в нуль; действи-

тельно, такъ какъ прямая Δ расположена выше прямой Π , то движущаяся точка, которая колеблется между A и A' , никогда не достигнетъ первой прямой, и реакція постоянно будетъ оставаться положительной. Точно такъ же, если $\frac{2a}{3} > l$, то прямая Δ лежитъ внѣ окружности, и реакція не будетъ обращаться въ нуль: точка будетъ совершать непрерывное періодическое движеніе по окружности. Слѣдовательно, реакція обратится въ нуль лишь тогда, когда

$$0 \leq a \leq \frac{3l}{2};$$

если подставимъ сюда значеніе a , то это условіе выразится такъ:

$$\sqrt{2gl} \leq v_0 \leq \sqrt{5gl}.$$

177. Простой маятникъ въ сопротивляющейся средѣ.—

Если мы желаемъ принять въ расчетъ сопротивленіе среды, въ которой происходитъ движеніе, то для этой цѣли достаточно прибавить къ силамъ N и $-mg$, дѣйствующимъ на движущуюся точку, третью силу R , которая направлена по касательной въ сторону, противоположную движенію, и возрастаетъ вмѣстѣ со скоростью.

Уравненіе живыхъ силъ, написанное въ формѣ

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_t,$$

дастъ намъ уравненіе

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta - R,$$

которое можно представить такъ:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{R}{ml};$$

въ этомъ уравненіи осью проекцій служить касательная, направленная въ сторону положительныхъ дугъ.

Изслѣдуемъ случай безконечно малыхъ качаній въ средѣ, въ которой сопротивленіе пропорціонально скорости. При такомъ условіи мы будемъ имѣть:

$$\frac{R}{ml} = 2k \frac{d\theta}{dt} \quad (k \text{ есть положительная постоянная});$$

замѣнивъ $\sin \theta$ черезъ θ , мы представимъ уравненіе движенія въ такомъ видѣ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2k \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Это уравненіе пригодно какъ для движенія вверхъ, такъ и для движенія внизъ, потому что при измѣненіи направленія движенія на противоположное измѣняется знакъ силы R .

Уравненіе движенія есть линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами безъ послѣдняго члена. Для интегрированія его положимъ $\theta = e^{rt}$ — для опредѣленія r мы будемъ имѣть уравненіе

$$r^2 + 2kr + \frac{g}{l} = 0,$$

или

$$r = -k \pm \sqrt{k^2 - \frac{g}{l}}.$$

Если мы предположимъ, что сопротивленіе очень мало, то эти два корня будутъ мнимыми, и мы можемъ положить

$$r = -k \pm \mu i, \quad \text{при чемъ } \mu^2 = \frac{g}{l} - k^2,$$

такъ что общій интегралъ уравненія движенія будетъ

$$\theta = e^{-kt} (A \cos \mu t + B \sin \mu t);$$

точка совершаетъ, слѣдовательно, затухающее колебательное движеніе (п. 41).

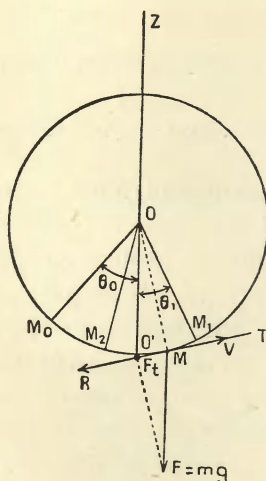
Предположимъ, что движущаяся точка выходитъ въ моментъ $t=0$ изъ положенія M_0 (фиг. 122) безъ начальной скорости; обозначимъ черезъ θ_0 уголъ $O'M_0$. Положивъ въ предыдущей формулѣ $t=0$, мы видимъ, что $A = \theta_0$. Написавъ, что скорость $l \frac{d\theta}{dt}$ обращается въ нуль при $t=0$, мы будемъ имѣть:

$$B = \frac{k\theta_0}{\mu}.$$

Такимъ образомъ,

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\theta_0}{\mu} e^{-kt} (\mu \cos \mu t + k \sin \mu t), \\ v &= l \frac{d\theta}{dt} = -\frac{l\theta_0}{\mu} (k^2 + \mu^2) e^{-kt} \sin \mu t. \end{aligned}$$

Движущаяся точка, выходя из положенія M_0 , описывает дугу M_0M_1 окружности и достигает положенія M_1 , въ которомъ скорость обращается въ нуль, по истеченіи времени t_1 , опредѣляемаго равен-



Фиг. 122.

ствомъ $\mu t_1 = \pi$, т. е. $t_1 = \frac{\pi}{\mu}$; затѣмъ она движется обратно тѣмъ же путемъ и достигаетъ точки M_2 въ моментъ

$$t_2 = \frac{2\pi}{\mu}$$

и т. д. Качанія изохронны, какъ въ пустотѣ, но продолжительность колебаній нѣсколько больше, такъ какъ

$$\mu < \sqrt{\frac{g}{l}}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\pi}{\mu} > \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Чтобы изучить измѣненія амплитуды, рассмотримъ выраженіе для θ . Положивъ въ немъ $t_1 = \frac{\pi}{\mu}$, имѣемъ:

$$\theta_1 = -e^{-\frac{k\pi}{\mu}} \theta_0.$$

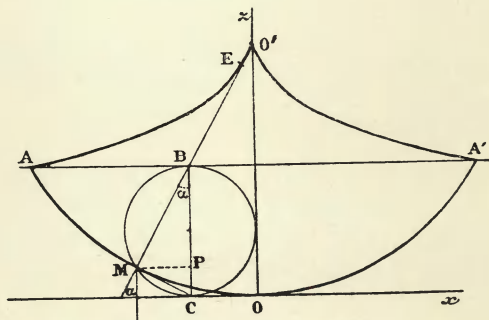
Слѣдовательно, значеніе θ_1 противоположно по знаку значенію θ_0 и абсолютно меньше его. Для момента $t_2 = \frac{2\pi}{\mu}$ имѣемъ:

$$\theta_2 = e^{-\frac{2k\pi}{\mu}} \theta_0,$$

и т. д. Мы видимъ, слѣдовательно, что амплитуды измѣняются въ геометрической прогрессіи, знаменатель которой есть $e^{-\frac{k\pi}{\mu}}$.

178. Циклоидальный маятникъ. — Такъ называется тяжелая матеріальная точка, которая движется безъ тренія по циклоидѣ съ горизонтальнымъ основаніемъ, расположенной въ вертикальной плоскости и обращенной вогнутостью вверхъ.

Возьмемъ начало координатъ въ наинизшей точкѣ кривой и направимъ ось z -овъ вертикально вверхъ. Прежде, чѣмъ приступить къ изученію движенія, припомнимъ нѣкоторыя элементарныя свойства циклоиды. Рассмотримъ нѣкоторое положеніе образующаго круга и соотвѣтственную точку M (фиг. 123); нормаль къ кривой



Фиг. 123.

есть MB , а центръ кривизны лежитъ въ точкѣ E , симметричной съ точкой M относительно точки B ; геометрическое мѣсто центра кривизны E есть циклоида, равная данной циклоидѣ, съ вершинами въ точкахъ A и A' ; наконецъ, длина касательной MC равна половинѣ дуги OM .

Въ прямоугольномъ треугольникѣ BMC

$$\overline{MC}^2 = BC \cdot CP,$$

т. е.

$$\frac{s^2}{4} = 2Rz,$$

откуда

$$\frac{dz}{ds} = \frac{s}{4R}.$$

Проекция силы тяжести на касательную равна $-mg \frac{dz}{ds}$, т. е. $-mg \frac{s}{4R}$, и уравнение живых сил даетъ:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4R} s.$$

Мы пришли къ такому уравненію, какое мы имѣли для движенія матеріальной точки, притягиваемой къ неподвижному центру съ силой, пропорціональной разстоянію. Общій интеграль этого уравненія будетъ

$$s = A \cos t \sqrt{\frac{g}{4R}} + B \sin t \sqrt{\frac{g}{4R}};$$

онъ приводится къ виду

$$s = s_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{4R}},$$

если движущаяся точка въ начальный моментъ находится на криволинейномъ разстояніи s_0 отъ начала, имѣя начальную скорость нуль. При такихъ условіяхъ точка достигнетъ наинизшей точки по истеченіи времени

$$T = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Продолжительность качанія не зависитъ отъ начальнаго положенія движущейся точки, т. е. отъ амплитуды: движеніе будетъ таутохроннымъ.

Гюйгенсъ (Huygens) построилъ вещественный циклоидальный маятникъ слѣдующимъ образомъ. Къ точкѣ возврата O' развертки онъ прикрѣпилъ нить, длина которой была равна $4R$. Если заставить нить наворачиваться послѣдовательно на двѣ дуги $O'A$ и $O'A'$, то, согласно приведеннымъ выше свойствамъ циклоиды, тяжелая точка, прикрѣпленная къ концу M этой нити, опишетъ разсматриваемую циклоиду.

VIII. — ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ.

179. Уравненія движенія. — Пусть S будетъ поверхность, которая можетъ съ теченіемъ времени измѣнять свое положеніе, а также и форму. Будучи отнесена къ неподвижнымъ осямъ, она будетъ имѣть уравненіе вида

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (1)$$

Въ частномъ случаѣ, когда поверхность неподвижна, это уравненіе не содержитъ явно времени t .

Предположимъ, что матеріальная точка, имѣющая массу m и координаты x, y, z , должна двигаться по этой поверхности безъ тренія подѣ дѣйствіемъ силъ, равнодѣйствующая которыхъ имѣетъ проекціи X, Y, Z . Поверхность производитъ на точку нормальную реакцію, проекціями которой служатъ количества вида (п. 85)

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (N)$$

Мы можемъ разсматривать эту точку, какъ свободную, но находящуюся подѣ дѣйствіемъ двухъ силъ F и N ; уравненія движенія будутъ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти уравненія вмѣстѣ съ уравненіемъ (1) поверхности составляютъ систему четырехъ уравненій, опредѣляющихъ координаты x, y, z , т. е. движеніе, и множитель λ , т. е. реакцію, въ функціи времени t .

Мы не даемъ примѣра примѣненія этого общаго метода къ случаю подвижной поверхности: почти всегда удобнѣе будетъ воспользоваться уравненіями Лагранжа или теоріей относительныхъ движеній.

180. Случай неподвижной поверхности. — Когда поверхность неподвижна, общій методъ можетъ быть упрощенъ. Теорема живыхъ силъ даетъ сейчасъ же уравненіе, не зависящее отъ λ . Дѣйствительно, въ уравненіе живыхъ силъ

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz$$

не входитъ нормальная реакція, потому что работа этой силы равна нулю.

Далѣе, помноживъ уравненія (2) соотвѣтственно на dx , dy , dz и складывая результаты, мы получимъ уравненіе, въ которомъ коэффициентъ при λ

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df = 0,$$

ибо производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ тождественно равна нулю, такъ какъ поверхность неподвижна.

Если бы поверхность была подвижной, то нельзя было бы исключить реакціи путемъ примѣненія теоремы живыхъ силъ, потому что дѣйствительное перемѣщеніе движущейся точки не было бы перпендикулярно къ нормальной реакціи. Другими словами, мы имѣли бы уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

и коэффициентъ при λ въ уравненіи живыхъ силъ не былъ бы нулемъ: онъ былъ бы равенъ $-\frac{df}{dt} dt$.

Если существуетъ силовая функція $U(x, y, z)$, то уравненіе живыхъ силъ даетъ первый интегралъ движенія

$$\frac{mv^2}{2} = U + h.$$

Можетъ также случиться, что выраженіе $Xdx + Ydy + Zdz$ не представляетъ собою полного дифференціала, но обращается въ таковой въ силу соотношенія $f(x, y, z) = 0$. Напримѣръ, если точка поверхности опредѣляется двумя параметрами q_1 и q_2 ,

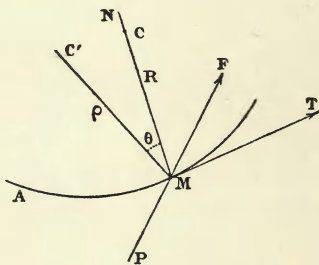
$$x = \varphi(q_1, q_2), \quad y = \psi(q_1, q_2), \quad z = \omega(q_1, q_2),$$

то выражение $X dx + Y dy + Z dz$ получает форму $Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2$ послѣ замѣны количествъ X, Y, Z, dx, dy, dz ихъ значеніями, выраженными черезъ q_1, q_2, dq_1, dq_2 . При этихъ условіяхъ выраженіе $Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2$ можетъ оказаться полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи $U(q_1, q_2)$, и мы опять получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U + h.$$

Нормальная реакція. — Если движеніе извѣстно, то для нахожденія реакціи достаточно опредѣлить λ посредствомъ одного изъ уравненій (2). Предположимъ, что движущаяся точка только положена на поверхность, т. е. можетъ оставить поверхность съ одной или другой ея стороны. Для того, чтобы точка оставалась на поверхности, необходимо, чтобы реакція N была направлена въ сторону, противоположную той, куда можетъ удалиться точка, т. е., какъ было объяснено въ п. 85, нужно, чтобы множитель λ имѣлъ напередъ опредѣленный знакъ. Если въ нѣкоторый моментъ множитель λ обращается въ нуль и измѣняетъ знакъ, то точка оставляетъ поверхность, и мы приходимъ къ случаю свободной точки.

Внутреннія уравненія. — Отмѣтимъ на траекторіи начало дугъ A (фиг. 124). Пусть M будетъ нѣкоторое положеніе движущейся точки; проведемъ черезъ эту точку касательную MT въ сто-



Фиг. 124.

рону возрастающихъ дугъ. Пусть C будетъ центръ кривизны нормального сѣченія, проходящаго черезъ касательную MT ; буквою R обозначимъ его радіусъ кривизны MC ; направленіе $\vec{MC}$ мы будемъ считать положительнымъ направленіемъ нормали. Пусть также MC'

будетъ главная нормаль траекторіи и $\varrho = MC'$ — ея радіусъ кривизны; обозначимъ черезъ θ уголъ соприкасающейся плоскости TMC' траекторіи съ нормалью къ поверхности. По теоремѣ Менъе

$$\varrho = R \cos \theta.$$

Проектируя направление MC' на касательную плоскость, мы получимъ полупрямую MP , на которой мы будемъ считать положительнымъ направлѣніе проекціи отрѣзка MC' . Пусть F_t , F_n , F_p будутъ проекціи силы F на прямыя MT , MC , MP , и пусть N будетъ алгебраическое значеніе нормальной реакціи. Извѣстно, что равнодѣйствующая силъ F и N можетъ быть разложена на двѣ составляющія: одна равна $m \frac{dv}{dt}$ и направлена по касательной MT , другая равна $\frac{mv^2}{\varrho}$ и направлена по главной нормали MC' ; эта система двухъ силъ эквивалентна, слѣдовательно, системѣ, состоящей изъ двухъ силъ F и N . Приравнивая ихъ соотвѣтственные проекціи на оси MT , MP , MC , мы находимъ:

$$m \frac{dv}{dt} = F_t, \quad \frac{mv^2}{\varrho} \sin \theta = F_p, \quad \frac{mv^2}{\varrho} \cos \theta = F_n + N. \quad (3)$$

Эти уравненія могутъ принять болѣе простой видъ. Обозначимъ черезъ ϱ_g радіусъ геодезической кривизны $\frac{\varrho}{\sin \theta}$; въ силу найденнаго выше соотношенія $\frac{\varrho}{\cos \theta} = R$ предыдущія уравненія получаютъ слѣдующій видъ:

$$m \frac{dv}{dt} = F_t, \quad \frac{mv^2}{\varrho_g} = F_p, \quad \frac{mv^2}{R} = F_n + N. \quad (4)$$

Если существуетъ силовая функція, то $mv^2 = 2(U + h)$, и послѣднее уравненіе даетъ возможность вычислить N , коль скоро извѣстна величина R .

Изъ этихъ уравненій мы выведемъ интересное слѣдствіе. Будемъ деформировать поверхность такимъ образомъ, чтобы длины линій, проведенныхъ на этой поверхности, не измѣнялись; при этомъ преобразованіи радіусы геодезической кривизны не измѣняются. Поэтому, если мы измѣнимъ силу F такимъ образомъ, чтобы ея проекція на касательную плоскость оставалась прежней, то первая два

изъ уравненій (4), которыми опредѣляется движеніе, не измѣняются, и движеніе будетъ такое же, какъ и въ первомъ случаѣ. Мы видимъ, такимъ образомъ, что траекторія тяжелой точки, которая должна двигаться по вертикальному цилиндру, получается путемъ наворачиванія на этотъ цилиндръ параболы съ вертикальной осью. Точно такъ же траекторія тяжелой точки на конусѣ вращенія съ вертикальной осью получится посредствомъ наворачиванія на этотъ конусъ плоской траекторіи движущейся точки, находящейся подъ дѣйствіемъ постоянной центральной силы ³³).

181. Геодезическія линіи. — Простѣйшимъ случаемъ будетъ тотъ, когда движущаяся точка, пущенная по неподвижной поверхности, свободна отъ дѣйствія силъ. Въ этомъ случаѣ уравненіе живыхъ силъ

$$d \frac{mv^2}{2} = 0$$

показываетъ, что скорость постоянна. Траекторіей служитъ геодезическая линія поверхности, потому что соприкасающаяся плоскость этой линіи должна содержать ту единственную силу, которая дѣйствуетъ на движущуюся точку, а именно нормальную реакцію. Это вытекаетъ, кромѣ того, изъ второго изъ уравненій (4), дающаго

$$\frac{mv^2}{\varrho_g} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\varrho_g} = 0,$$

такъ какъ v есть постоянная, а послѣднимъ уравненіемъ и характеризуются геодезическія линіи. Послѣднее изъ уравненій (4) даетъ теперь

$$N = \frac{mv^2}{R}.$$

Легко видѣть, что въ настоящемъ случаѣ

$$\theta = 0, \quad \text{поэтому} \quad R = \varrho,$$

такъ что нормальная реакція имѣетъ значеніе

$$N = \frac{mv^2}{\varrho};$$

нормальная реакція измѣняется обратно пропорціонально радиусу кривизны траекторіи.

Въ разсматриваемомъ случаѣ общія уравненія движенія приводятся къ слѣдующимъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

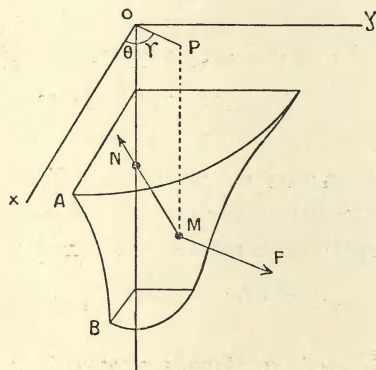
При помощи уравненія

$$\frac{ds}{dt} = v_0$$

мы исключимъ время; для этого достаточно подставить въ предыдущія уравненія $\frac{ds^2}{v_0^2}$ вмѣсто dt^2 . Это преобразование допустимо лишь въ силу того, что скорость v_0 постоянна.

Замѣчаніе. — Если поверхность допускаетъ прямолинейныя образующія, то ихъ нужно будетъ найти, какъ частныя траекторіи; дѣйствительно, если движущаяся точка пущена по одной изъ этихъ образующихъ, то она опишетъ ее сама собою — въ силу начала инерціи, и реакція поверхности будетъ равна нулю.

182. Движеніе по поверхности вращенія. — Если неподвижная поверхность есть поверхность вращенія, то мы сейчасъ же получаемъ два уравненія, которыя не зависятъ отъ реакціи и опредѣ-



Фиг. 121.

ляютъ движеніе. Первое дается, какъ въ общемъ случаѣ неподвижной поверхности, теоремой живыхъ силъ; второе мы получимъ, при-

мѣняя теорему о моментахъ около оси поверхности, потому что вслѣдствіе взаимнаго пересѣченія нормали къ поверхности съ осью вращенія моментъ нормальной реакціи равенъ нулю.

Ось вращенія мы примемъ за ось z -овъ; пусть $z = \varphi(x)$ будетъ уравненіе меридіана AB , лежащаго въ плоскости zOx ; уравненіе поверхности будетъ $z = \varphi(r)$, гдѣ $r^2 = x^2 + y^2$, и декартовы координаты какой-либо точки выразятся такъ:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = \varphi(r),$$

гдѣ r и θ суть полярныя координаты проекціи P движущейся точки на плоскость xOy (фиг. 125).

Мы имѣемъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + \varphi'^2) dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

гдѣ φ' написано вмѣсто $\varphi'(r)$. Уравненія движенія будутъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \left[(1 + \varphi'^2) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] &= X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d}{dt} m r^2 \frac{d\theta}{dt} &= xY - yX, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

при чемъ количества въ правыхъ частяхъ выражены черезъ r и θ .

Геодезическія линіи. — Разысканіе геодезическихъ линій поверхности вращенія приводится къ квадратурамъ. Геодезическая линія есть траекторія точки, которая движется по поверхности, будучи свободна отъ дѣйствія непосредственно приложенныхъ силъ. Мы имѣемъ здѣсь $X = Y = Z = 0$, и уравненія (5) принимаютъ видъ:

$$\begin{aligned} (1 + \varphi'^2) dr^2 + r^2 d\theta^2 &= v_0^2 dt^2, \\ r^2 d\theta &= C dt, \end{aligned}$$

гдѣ v_0 обозначаетъ начальную скорость, а C есть произвольная постоянная. Исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій dt , мы найдемъ отсюда проекцію траекторіи на плоскость xOy :

$$(1 + \varphi'^2) dr^2 + r^2 d\theta^2 = \frac{v_0^2}{C^2} r^4 d\theta^2.$$

Положивъ $\frac{v_0^2}{C^2} = \frac{1}{a^2}$ и рѣшивъ уравненіе относительно $d\theta$, мы будемъ имѣть:

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \varphi'^2}{\frac{1}{a^2} - 1}};$$

для опредѣленія знака нужно разсмотрѣть, въ какую сторону направлена начальная скорость. Уравненіе геодезическихъ линій въ конечномъ видѣ будетъ:

$$\theta = \int \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \varphi'^2}{\frac{r^2}{a^2} - 1}} + \beta.$$

Это уравненіе содержитъ двѣ постоянныя α, β , которыя можно опредѣлить, напримѣръ, изъ условія, что геодезическая линія проходитъ черезъ двѣ данныя точки. Изъ этихъ двухъ постоянныхъ первая α обуславливаетъ форму кривой, измѣненіе же второй изъ нихъ β соотвѣтствуетъ вращенію этой геодезической линіи вокругъ оси поверхности.

Формула Клеро. — Изъ предыдущаго можно вывести геометрическое соотношеніе, характеризующее геодезическія линіи поверхности вращенія. Если мы разсматриваемъ движущуюся точку, которая описываетъ геодезическую линію, то моментъ количества движенія и, слѣдовательно, моментъ скорости около оси есть величина постоянная. Разложимъ скорость на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна равна $v \sin i$ и направлена по касательной къ параллельному кругу, а другая $v \cos i$ направлена по касательной къ меридіану (i есть уголъ геодезической линіи съ меридіаномъ). Моментъ второй составляющей, пересекающей ось, есть нуль. Мы имѣемъ, слѣдовательно, соотношеніе $rv \sin i = \text{const.}$, а такъ какъ скорость v постоянна, то отсюда выводится соотношеніе $r \sin i = \text{const.}$, которое найдено Клеро.

183. Движеніе тяжелой точки по поверхности вращенія съ вертикальной осью. — Интегрированіе уравненій этого движенія приводится къ квадратурамъ. Возьмемъ полуполярныя координаты, какъ въ предыдущемъ пунктѣ, и направимъ ось Oz вертикально внизъ (фиг. 126). Данная сила F теперь есть вѣсъ mg , представляющій собой производную функции mgz . Моментъ силы тяжести около оси Oz равенъ нулю, такъ что теорема площадей примѣняется къ горизонтальной проекціи движенія. Слѣдовательно, уравненія движенія будутъ:

$$(1 + \varphi'^2) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2gz + h = 2g\varphi(r) + h,$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C.$$

Исключивъ dt , мы получимъ уравненіе проекціи траекторіи на плоскость xOy :

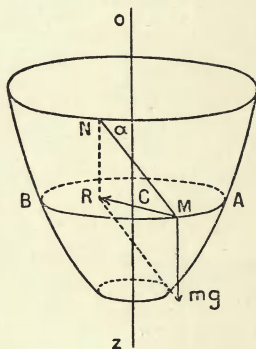
$$(1 + \varphi'^2) dr^2 + r^2 d\theta^2 = [2g\varphi(r) + h] \frac{r^4 d\theta^2}{C^2}.$$

Перемѣнныя раздѣляются, и мы найдемъ θ въ функціи отъ r посредствомъ квадратуры

$$\theta = \int \frac{C dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \varphi'^2}{[2g\varphi(r) + h] r^2 - C^2}}.$$

Точно такъ же можно будетъ интегрировать при помощи квадратуръ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда существуетъ силовая функція, зависящая только отъ z и r .

Стаціонарное движеніе. — Рѣшимъ вопросъ, можетъ ли случиться при надлежащихъ начальныхъ условіяхъ, чтобы точка описывала данный параллельный кругъ AMB , имѣющій радіусъ r_0 (фиг. 126). Назовемъ черезъ v_0 начальную скорость, съ которой



Фиг. 126.

должна быть пущена точка по касательной къ данному параллельному кругу для того, чтобы она описывала этотъ кругъ. При данныхъ условіяхъ работа силы вѣса равна нулю, и скорость будетъ постоянна и равна v_0 . Такъ какъ движеніе — круговое равномерное, то равнодѣйствующая R приложенныхъ силъ, а именно вѣса mg и реакціи N , должна быть направлена къ центру C параллельнаго

круга и должна имѣть величину $\frac{mv_0^2}{r_0}$. Изъ чертежа видно, что это условіе можетъ быть выполнено лишь тогда, когда вершина конуса нормалей, взятыхъ вдоль даннаго параллельнаго круга, расположена выше послѣдняго. Предположимъ, что это условіе выполняется, и пусть α будетъ острый уголъ нормали MN , проведенной въ какой-либо точкѣ параллельнаго круга, съ осью Oz . Выразивъ, что сумма проекцій сначала на MC и потомъ на Oz двухъ приложенныхъ силъ равна проекціи ихъ равнодѣйствующей R , мы будемъ имѣть:

$$N \sin \alpha = m \frac{v_0^2}{r_0} \quad N \cos \alpha = mg,$$

откуда искомая скорость

$$v_0 = \sqrt{gr_0 \tan \alpha}.$$

184. Сферическій маятникъ. — Сферическій маятникъ состоитъ изъ тяжелой точки, которая движется безъ тренія по неподвижной сферѣ. Движеніе сферическаго маятника есть частный случай движенія по поверхности вращенія съ вертикальною осью, такъ какъ мы можемъ разсматривать сферу, какъ поверхность вращенія вокругъ вертикальнаго діаметра.

Возьмемъ начало координатъ въ центрѣ сферы и направимъ ось Oz вертикально книзу. Уравненіе сферы въ цилиндрическихъ координатахъ будетъ

$$r^2 + z^2 = l^2,$$

гдѣ l есть радіусъ сферы, т. е. длина маятника. Теоремы живыхъ силъ и площадей даютъ:

$$v^2 = 2gz + h, \quad r^2 d\theta = C dt. \quad (6)$$

Посредствомъ этихъ трехъ уравненій можно выразить r , θ и z въ функціи отъ t . Удобнѣе, однако, вычислить r , t и θ въ функціи отъ z . Съ этой цѣлью мы подставляемъ вмѣсто v^2 его значеніе въ полярныхъ координатахъ и получаемъ:

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + h,$$

Подставивъ сюда $\sqrt{l^2 - z^2}$ вмѣсто r и $\frac{-z dz}{\sqrt{l^2 - z^2}}$ вмѣсто dr , мы получимъ уравненіе

$$\frac{l^2 dz^2}{dt^2} = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2. \quad (7)$$

Положивъ

$$f(z) = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2,$$

мы найдемъ для t и θ значенія:

$$dt = \frac{l dz}{\pm \sqrt{f(z)}}, \quad t = \int_{z_0}^z \frac{l dz}{\pm \sqrt{f(z)}}, \quad (8)$$

$$d\theta = \frac{C dt}{r^2} = \frac{Cl dz}{\pm (l^2 - z^2) \sqrt{f(z)}}. \quad (9)$$

Знакъ опредѣляется начальными данными; сомнѣніе можетъ возникнуть лишь въ случаѣ, когда $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0$; тогда мы смотримъ, должно ли возрастать или убывать z при измѣненіи его отъ начального значенія z_0 .

Мы видимъ, что рѣшеніе задачи приводится къ эллиптическимъ квадратурамъ.

Второе изъ уравненій (6) показываетъ, что производная $\frac{d\theta}{dt}$ имѣетъ во время движенія постоянный знакъ; это значитъ, что проекція движущейся точки на плоскость xOy все время вращается въ одну и ту же сторону вокругъ оси Oz , за исключеніемъ случая, когда $C = 0$; но въ этомъ случаѣ уголъ θ остается постояннымъ, и мы имѣемъ простой маятникъ.

Для того, чтобы интегралы были вещественными, необходимо, чтобы функція $f(z)$ была положительной. Этотъ полиномъ имѣетъ три вещественныхъ корня. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно подставить вмѣсто z послѣдовательно числа $-\infty$, $-l$, z_0 , $+l$, которыя даютъ функціи $f(z)$ послѣдовательно значенія $+\infty$, $-C^2$, $f(z_0) > 0$, $-C^2$; существуютъ, слѣдовательно, два вещественныхъ корня α , β соотвѣтственно въ интервалахъ $+l, z_0$ и $z_0, -l$ и корень γ , который меньше, чѣмъ $-l$. Предположимъ сначала, что эти корни будутъ неравными. Замѣтимъ, что сумма произведеній корней, взятыхъ попарно, равна $-l^2$; слѣдовательно,

$$\gamma(\alpha + \beta) + \alpha\beta = -l^2,$$

откуда

$$\gamma = -\frac{l^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta};$$

такъ какъ корни α и β заключены между $-l$ и $+l$, то $l^2 + \alpha\beta > 0$, а такъ какъ $\gamma < 0$, то должно имѣть мѣсто неравенство

$$\alpha + \beta > 0;$$

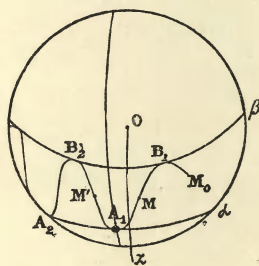
слѣдовательно, параллельный кругъ, отстоящій на равныхъ разстояніяхъ отъ параллельныхъ круговъ $z = \alpha$, $z = \beta$, расположенъ всегда выше центра, и корень α всегда имѣетъ положительное значеніе. Такимъ образомъ,

$$f(z) = -2g(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma),$$

при чемъ корень γ меньше, чѣмъ $-l$, и значеніе z содержится между $-l$ и $+l$, такъ что $z - \gamma > 0$. Слѣдовательно, для того, чтобы имѣло мѣсто неравенство $f(z) > 0$, необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\beta < z < \alpha.$$

Для бѣльшей опредѣленности предположимъ, что z , начиная отъ $z = z_0$, сперва убываетъ. Передъ радикаломъ нужно будетъ взять знакъ $-$, z убываетъ до значенія β , и, когда движущаяся точка достигнетъ точки B_1 параллельнаго круга B_1B_2 ($z = \beta$) (фиг. 127),



Фиг. 127.

траекторія будетъ имѣть горизонтальную касательную, потому что въ этой точкѣ $\frac{dz}{dt} = 0$, но $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$. Начиная съ этого момента, движущаяся точка продолжаетъ обращаться вокругъ оси z -овъ въ ту же

сторону, но она должна будет опускаться; она опустится до параллельнаго круга A_1A_2' ($z = \alpha$), который касается ея траекторіи въ точкѣ A_1 , затѣмъ она опять будетъ подыматься до параллельнаго круга $z = \beta$ и т. д.

Промежутокъ времени, въ теченіе котораго точка переходитъ изъ положенія B_1 въ A_1 , равенъ

$$T = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{l dz}{V f(z)},$$

и за такой же промежутокъ времени движущаяся точка проходитъ дуги A_1B_2 , B_2A_2 и т. д.

Если движущаяся точка была вначалѣ пущена въ горизонтальномъ направленіи, то она первоначально находится на одномъ изъ крайнихъ параллельныхъ круговъ, и мы имѣемъ вначалѣ $\frac{dz}{dt} = 0$: это и есть оговоренный нами выше случай, когда возникаетъ сомнѣніе относительно знака. Если движущаяся точка находится на параллельномъ кругѣ β , то z будетъ возрастать, и передъ радикаломъ мы возьмемъ знакъ $+$; если же движущаяся точка выходитъ изъ параллели α , то мы возьмемъ знакъ $-$.

Меридіанальныя плоскости точекъ касанія траекторіи съ крайними параллельными кругами служатъ плоскостями симметріи для этой траекторіи. Дѣйствительно, рассмотримъ двѣ точки M и M' одного и того же параллельнаго круга, лежація на вѣтвяхъ A_1B_1 и A_1B_2 траекторіи; если θ , θ' , θ_1 суть значенія угла θ , соотвѣтствующія точкамъ M , M' , A_1 , то

$$\theta_1 - \theta = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{Cl dz}{(l^2 - z^2) V f(z)}$$

и

$$\theta' - \theta_1 = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Cl dz}{(l^2 - z^2) V f(z)} = \theta_1 - \theta.$$

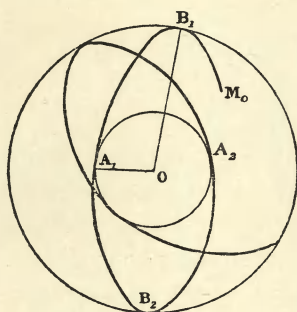
Слѣдовательно, точки M и M' симметричны относительно меридіана точки A_1 . Кромѣ того, движущаяся точка проходитъ дуги MA_1

и A_1M' въ равные промежутки времени, ибо эти промежутки имѣютъ общее значеніе

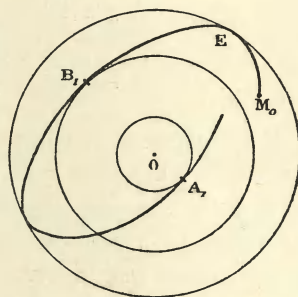
$$\int_z^a \frac{l dz}{V f(z)}.$$

Теперь построимъ проекцію траекторіи на плоскость xOy ; мы будемъ различать два случая, смотря по тому, лежатъ ли оба крайніе параллельные круги на одномъ и томъ же полушаріи или на разныхъ.

Первый случай. — Крайніе параллельные круги лежатъ на нижнемъ полушаріи. Проекція ниже лежащей окружности $z = a$ будетъ находиться внутри проекціи окружности $z = \beta$; проекція траекторіи, колеблющаяся между обѣими окружностями, имѣетъ форму, представленную на фиг. 128; можно доказать, что она не имѣетъ



Фиг. 128.



Фиг. 129.

точекъ перегиба. Наблюдателю, находящемуся на оси z -овъ, кажется, что движущаяся точка описываетъ похожую на эллипсъ замкнутую кривую, перемѣщающуюся въ направленіи движенія; можно доказать, что уголъ A_1OB_1 больше прямого.

Второй случай. — Теперь предположимъ, что двѣ крайнія окружности лежатъ съ различныхъ сторонъ экватора. Въ проекціи окружность $z = a$ будетъ попрежнему внутри окружности β , потому что $a + \beta > 0$. Съ другой стороны, проекція траекторіи должна будетъ касаться экватора и будетъ имѣть форму, представленную на фигурѣ 129; при этомъ она можетъ имѣть точки перегиба.

Пуизе (Puisseux, „Journal de Liouville“, 1842) доказаль упомянутое нами выше свойство проекции: уголъ $\Psi = A_1OB_1$, опредѣляемый интеграломъ

$$\Psi = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{Cl \, dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{f(z)}},$$

всегда больше прямого угла. Мы приводимъ здѣсь этотъ результатъ безъ доказательства; послѣднее можно найти въ „Traité de Mécanique“ Аппеля (гл. XIII *).

Реакція сферы. — Для вычисленія реакціи сферы или натяженія нити достаточно воспользоваться формулой

$$N + F_n = \frac{mv^2}{R},$$

которую даютъ внутреннія уравненія движенія [п. 180, формула (4)]. Мы имѣемъ здѣсь $R=l$ и, слѣдовательно,

$$N = \frac{mv^2}{l} - F_n = \frac{m}{l} (2gz + h) + \frac{mgz}{l},$$

$$N = \frac{m}{l} (3gz + h).$$

Мы получили такимъ образомъ ту же линейную функцію отъ z , что и въ случаѣ простого маятника. Если движущаяся точка лишь связана съ центромъ сферы гибкой нитью, то она оставляетъ поверхность, когда реакція становится отрицательной, и затѣмъ падаетъ, описывая параболу, соприкасающуюся съ ея траекторіей на сферѣ. Если же точка не можетъ оставить сферы, на примѣръ, если она находится между двумя безконечно близкими сферическими листками, то она будетъ надавливать на наружный листокъ, когда реакція N будетъ положительной, и на внутренній листокъ, когда реакція N будетъ отрицательной.

Случай, когда полиномъ $f(z)$ имѣетъ двойной корень: стационарное движеніе. — Мы положили

$$f(z) = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2 = -2g(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$$

*) Имѣется русскій переводъ перваго тома этого трактата: „Руководство теоретической (раціональной) механики“. Переводъ Безрукова Москва, 1911.

и видѣли, что

$$-\infty < \gamma < -l < \beta < z_0 < \alpha < l.$$

Полиномъ $f(z)$, слѣдовательно, можетъ имѣть двойной корень лишь въ случаѣ, когда либо $\beta = \gamma = -l$, либо $\beta = \alpha = z_0$. Но $f(-l) = -C^2$, и первое предположеніе, приводящее къ равенству $C=0$, слѣдуетъ отбросить. Предположимъ поэтому, что

$$\beta = \alpha = z_0.$$

Такъ какъ въ общемъ случаѣ значенія z содержатся между α и β , то въ разсматриваемомъ случаѣ значеніе z остается постояннымъ и равнымъ z_0 ; движущаяся точка описываетъ параллель, въ чемъ можно убѣдиться аналитически, такъ какъ уравненіе (7) теперь напишется такъ:

$$r^2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = f(z), \quad l \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2g(z - z_0)^2 (z - \gamma) = 0.$$

Мы видѣли, что разность $z - \gamma$ всегда имѣетъ положительное значеніе; такъ какъ лѣвая часть послѣдняго уравненія представляетъ собою сумму двухъ неотрицательныхъ количествъ, то оно можетъ удовлетворяться лишь при условіи, чтобы оба эти количества были нулями; это значитъ, что $z = z_0$.

Движеніе точки по этой параллели равномерно, что вытекаетъ изъ теоремы живыхъ силъ или изъ теоремы площадей. Горизонтальная скорость v_0 , съ которой слѣдуетъ пустить движущуюся точку по касательной къ параллельному кругу, имѣющему радіусъ r_0 , для того, чтобы она описывала этотъ кругъ, была выше вычислена для произвольной поверхности вращенія. Параллель должна лежать ниже центра; называя черезъ α острый уголъ нормали къ параллели съ вертикалью Oz , мы должны имѣть:

$$v_0 = \sqrt{gr_0 \tan \alpha};$$

такъ какъ въ сферѣ $\tan \alpha = \frac{r_0}{z_0}$, то

$$v_0 = r_0 \sqrt{\frac{g}{z_0}}.$$

Это можно также доказать аналитически. Если движущаяся точка пущена горизонтально по параллели $z = z_0$ радіуса r_0 , то постоянная площадей

$$C = \pm r_0 v_0,$$

а постоянная живыхъ силъ

$$h = v_0^2 - 2gz_0.$$

Подставивъ въ уравненіе

$$l^2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2$$

вмѣсто C и h ихъ значенія и вмѣсто r_0^2 его значеніе $l^2 - z_0^2$, мы получимъ:

$$\begin{aligned} l^2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 &= (l^2 - z^2) [2g(z - z_0) + v_0^2] - (l^2 - z_0^2) v_0^2 \\ &= (z - z_0) [2g(l^2 - z^2) - v_0^2(z + z_0)]. \end{aligned}$$

Полиномъ $f(z)$ допускаетъ, слѣдовательно, простой корень $z = z_0$, что очевидно а priori, ибо производная $\frac{dz}{dt}$ должна обращаться въ нуль при $z = z_0$, такъ какъ начальная скорость горизонтальна. Для того, чтобы значеніе $z = z_0$ было двойнымъ корнемъ полинома $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы второй множитель допускалъ корень z_0 , что приводитъ къ равенству

$$2g(l^2 - z_0^2) - 2v_0^2 z_0 = 0, \quad v_0^2 = r_0^2 \frac{g}{z_0},$$

т. е. къ значенію, которое было найдено выше. Эта формула даетъ для начальной скорости v_0 вещественное значеніе лишь въ томъ случаѣ, если $z_0 > 0$, т. е. если вершина конуса нормалей къ сферѣ вдоль параллели лежитъ выше этой параллели. Этотъ результатъ согласуется съ тѣмъ, къ которому мы пришли въ п. 183.

185. Безконечно малая колебанія. — Если мы введемъ нормальную реакцію N , то уравненія движенія маятника будутъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -N \frac{x}{l}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -N \frac{y}{l}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = mg - N \frac{z}{l}. \quad (10)$$

Когда колебанія достаточно малы, то значенія x и y будутъ оставаться очень малыми. Мы будемъ разсматривать ихъ, какъ безконечно малая перваго порядка, и будемъ пренебрегать членами вто-

рого порядка. При такой степени приближения мы будем имѣть $z=l$, такъ какъ формула Тэйлора даетъ:

$$z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = l \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \dots \right),$$

и второй членъ разложенія можетъ быть отброшенъ, какъ безконечно малая второго порядка. Сдѣланное нами допущеніе равносильно тому предположенію, что движущаяся точка не оставляетъ касательной плоскости. Последнее изъ уравненій (10) упрощается и даетъ

$$N = mg;$$

подставивъ это значеніе въ первыя два уравненія, мы получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{l}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gy}{l}.$$

Это суть уравненія движенія точки, находящейся подъ дѣйствіемъ центральной силы притяженія, пропорціональной разстоянію; траекторіей служитъ эллипсъ съ центромъ на оси z -овъ. Мы видимъ, дѣйствительно, что эти линейныя уравненія допускаютъ интегралы

$$x = A \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} + B \sin t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$y = A' \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} + B' \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Предположимъ, что при $t=0$

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0.$$

Это сводится къ предположенію, что плоскость zOx проходитъ черезъ одну изъ вершинъ малаго эллипса. Отсюда вытекаютъ слѣдующія значенія для постоянныхъ:

$$A = x_0, \quad A' = 0, \quad B = 0, \quad B' = v_0 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

поэтому

$$x = x_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad y = v_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Исключение времени t приводит къ уравненію эллипса. Продолжительность оборота равна

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

IX. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВѢСІЕ И ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНІЕ.

186. Уравненія относительнаго движенія точки. — Возьмемъ неподвижный трехгранный уголъ ($O_1x_1y_1z_1$) и подвижной трехгранный уголъ ($Oxyz$), движеніе котораго извѣстно. На точку M дѣйствуютъ силы, равнодѣйствующая которыхъ имѣетъ проекціи X, Y, Z на осяхъ системы $Oxyz$; требуется найти уравненія движенія точки относительно системы O . Это движеніе называется относительнымъ.

Въ кинематикѣ мы доказали слѣдующія теоремы (п. 54):

Абсолютная скорость V_a точки M есть геометрическая сумма относительной скорости V_r и переносной скорости V_e .

Абсолютное ускореніе J_a есть геометрическая сумма относительнаго ускоренія J_r , переноснаго ускоренія J_e и сложнаго центробѣжнаго (дополнительнаго) ускоренія J' .

Проекціи этого послѣдняго ускоренія равны

$$2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \quad 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \quad 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right), \quad (1)$$

гдѣ p, q, r суть составляющія по осямъ мгновеннаго вращенія ω подвижнаго трехграннаго угла; векторъ J' выражается такъ:

$$J' = 2\omega V_r \sin(\omega, V_r); \quad (2)$$

онъ перпендикуляренъ къ плоскости векторовъ ω и V_r и направленъ въ ту сторону, куда точка V_r переносится при вращеніи ω .

Послѣдняя теорема приводитъ къ геометрическому равенству

$$\vec{J}_r = \vec{J}_a - \vec{J}_e - \vec{J}',$$

или, если возьмемъ проекціи на ось Ox ,

$$(J_r)_x = (J_a)_x - (J_e)_x - (J')_x.$$

Но

$$(J_r)_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (J_a)_x = \frac{X}{m},$$

поэтому предыдущее соотношеніе получаетъ такой видъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X - m (J_e)_x - m (J')_x.$$

Взявъ проекціи также и на оси Oy и Oz , мы получимъ общія уравненія относительнаго движенія:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X - m (J_e)_x - m (J')_x, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - m (J_e)_y - m (J')_y, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z - m (J_e)_z - m (J')_z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Мы получили бы такія же уравненія, если бы оси $Oxyz$ были неподвижны и мы изучали бы движеніе точки M , на которую дѣйствуютъ три силы: сила (X, Y, Z) и двѣ силы, представляемыя соотвѣтственно векторами $-m \vec{J}_e$ и $-m \vec{J}'$. Чтобы формулировать этотъ результатъ, вектору $-m \vec{J}_e$ даютъ названіе центробѣжной силы или силы инерціи переноснаго движенія, а векторъ $-m \vec{J}'$ называютъ сложной центробѣжной силой. Итакъ, мы можемъ получить уравненія относительнаго движенія въ подвижныхъ осяхъ, предположивъ, что эти оси неподвижны, и присоединивъ къ равнодѣйствующей силѣ, дѣйствующихъ на движущуюся точку, двѣ фиктивные силы: центробѣжную силу и сложную центробѣжную силу.

Замѣчаніе. — Формула (2) показываетъ, что сложная центробѣжная сила можетъ быть постоянно равна нулю лишь въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ:

1° $\omega = 0$, переносное движеніе сводится къ поступательному движенію;

2° $V_r = 0$, точка M въ этомъ случаѣ неизмѣнно связана съ подвижной системой;

3° $\sin(\omega, V_r) = 0$; относительная скорость постоянно параллельна оси вращенія.

Относительная живая сила. — Если мы составимъ изъ уравненій (3) уравненіе, выражающее теорему живыхъ силъ, то члены, соотвѣтствующіе сложной центробѣжной силѣ, исчезнутъ. Это вытекаетъ изъ выраженій (1) для проекцій ускоренія J' , а также изъ того обстоятельства, что относительная работа сложной центробѣжной силы, перпендикулярной къ относительной скорости, равна нулю. Мы имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе

$$d \frac{mv_r^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz - m (J_e)_x dx - m (J_e)_y dy - m (J_e)_z dz$$

и можемъ сказать, что дифференціалъ половины относительной живой силы равенъ элементарной работѣ непосредственно приложенныхъ силъ и центробѣжной силы.

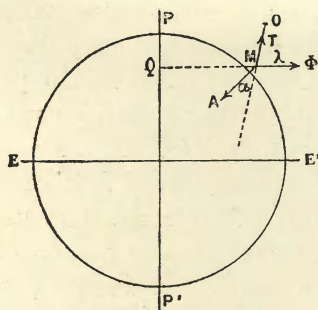
187. Относительное равновѣсіе. — Мы получимъ уравненія относительнаго равновѣсія, если предположимъ, что въ уравненіяхъ (3) координаты x, y, z суть постоянныя, т. е. если приравняемъ нулю производныя $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$. Ускореніе (J') будетъ тогда равно нулю, и мы будемъ имѣть уравненія:

$$\left. \begin{aligned} X - m (J_e)_x &= 0, \\ Y - m (J_e)_y &= 0, \\ Z - m (J_e)_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Итакъ, для полученія уравненій относительнаго равновѣсія, нужно разсматривать подвижныя оси, какъ неподвижныя, и написать уравненія, выражающія равновѣсіе между непосредственно приложенными силами и центробѣжной силой.

188. Равновѣсіе относительно поверхности земли. — Какъ примѣненіе предыдущей теоріи, изучимъ равновѣсіе относительно поверхности земли. Мы будемъ разсматривать землю, какъ

твердое тѣло, обладающее вращательнымъ движеніемъ съ постоянной угловой скоростью ω вокругъ линіи полюсовъ PP' (фиг. 130);



Фиг. 130.

мы не принимаемъ, слѣдовательно, во вниманіе вліянія, которое можетъ оказать поступательное движеніе земли вокругъ солнца на равновѣсіе или движеніе точекъ, находящихся на землѣ. Если примемъ за единицу времени секунду звѣзднаго времени, то угловая скорость ω будетъ равна $\frac{2\pi}{24.60^2}$; она выражается, слѣдовательно, очень малымъ числомъ.

Пусть P будетъ сѣверный полюсъ и EE' — плоскость экватора. Найдемъ положеніе относительнаго равновѣсія отвѣса OM , подвѣшеннаго въ точкѣ O , которая неизмѣнно связана съ землей. По опредѣленію положеніе OM равновѣсія нити есть вертикаль, проходящая черезъ точку M ; уголъ λ этой нити съ плоскостью экватора есть широта точки M ; мы обозначимъ черезъ q разстояніе MQ точки отъ оси PP' земли; эти элементы опредѣляются изъ наблюденія.

На точку M дѣйствуютъ двѣ силы: притяженіе земли A и натяженіе T нити; что эти силы не уравновѣшиваются взаимно слѣдуетъ изъ того, что точка M не обладаетъ абсолютнымъ равномернымъ и прямолинейнымъ движеніемъ. Напряженіе силы T есть то именно, что мы называемъ вѣсомъ mg матеріальной точки, а направленіе силы T противоположно вѣсу; уголъ α , образуемый направленіемъ OM отвѣса съ направленіемъ притяженія A , называется отклоненіемъ вертикали, обусловленнымъ вращеніемъ земли. Если бы земля не вращалась, то силы A и $T=mg$ взаимно уравно-

вѣшивались бы; онѣ были бы равны и прямопротивоположны, и мы имѣли бы $\alpha = 0$.

Для опредѣленія условий относительнаго равновѣсія, мы можемъ разсматривать землю, какъ неподвижную, но подъ условіемъ, чтобы къ силамъ A и T была присоединена центробѣжная сила Φ . Послѣдняя равна $m\omega^2 \varrho$ и направлена по продолженію радіуса QM параллельнаго круга, соотвѣтствующаго точкѣ M , потому что движеніе земли есть вращеніе вокругъ оси PP' . Если мы допустимъ, что вертикаль OM находится въ плоскости PMP' , то уголъ силы Φ съ вертикалью OM есть широта λ точки M . Такъ какъ три силы A , T и Φ взаимно уравниваются, то онѣ лежатъ въ одной плоскости, а именно въ плоскости силъ T и Φ , которая извѣстна во всякой точкѣ M земли; каждая изъ этихъ силъ равна и противоположна равнодѣйствующей двухъ другихъ. Вѣсъ, который равенъ и противоположенъ силѣ T , есть, слѣдовательно, равнодѣйствующая силы притяженія и центробѣжной силы; напряженіе силы T равно mg .

Въ плоскости трехъ силъ A , T , Φ сумма ихъ проекцій на какое-либо направленіе равна нулю; проектируя эти силы на вертикаль MO и на горизонталь, мы будемъ имѣть два условія:

$$A \cos \alpha - mg - m\omega^2 \varrho \cos \lambda = 0, \quad (5)$$

$$A \sin \alpha - m\omega^2 \varrho \sin \lambda = 0, \quad (6)$$

которыя даютъ $A \cos \alpha$ и $A \sin \alpha$ и позволяютъ, слѣдовательно, вычислить A и α во всякой точкѣ земли. Эти количества измѣняются вмѣстѣ съ широтой.

На экваторѣ $\lambda = 0$, и, слѣдовательно, также $\alpha = 0$. Обозначая черезъ A_0 , g_0 , ϱ_0 соотвѣтственные значенія величинъ A , g , ϱ , мы, согласно уравненію (5), получаемъ соотношеніе

$$mg_0 = A_0 - m\omega^2 \varrho_0 = A_0 \left(1 - \frac{m\omega^2 \varrho_0}{A_0} \right).$$

Вычисливъ отсюда A_0 , мы найдемъ, что отношеніе $\frac{m\omega^2 \varrho_0}{A_0}$ можно безъ замѣтной погрѣшности принять равнымъ $\frac{1}{289}$ или $\frac{1}{17^2}$; слѣдовательно,

$$mg_0 = A_0 \left(1 - \frac{1}{17^2} \right).$$

Итакъ, если бы земля вращалась со скоростью, въ семнадцать разъ большей, то тѣло, помѣщенное на экваторѣ, лишилось бы вѣса.

На полюсѣ $q=0$, $\lambda=90^\circ$; уголъ α , въ силу уравненія (6), по-прежнему равенъ нулю, и, въ виду уравненія (5), величина mg становится равной A ; все происходитъ такъ, какъ если бы земля не вращалась: это очевидно, такъ какъ мѣсто наблюденія находится на оси вращенія.

Введемъ теперь допущеніе, что земля есть шаръ, и что сила притяженія направлена къ центру C и имѣть одинаковое напряженіе во всѣхъ точкахъ земли, такъ что $A=A_0$. Тогда въ треугольникѣ CMQ

$$q = q_0 \cos(\lambda - \alpha),$$

и формула (6) даетъ:

$$\sin \alpha = \frac{m\omega^2}{A_0} q_0 \cos(\lambda - \alpha) \sin \lambda.$$

Уголъ α очень малъ; разложимъ обѣ части этой формулы по возрастающимъ степенямъ угла α и отбросимъ члены, содержащіе квадратъ α и произведеніе $\frac{1}{289} \alpha$. Мы получимъ приближенную формулу

$$\alpha = \frac{1}{289} \cos \lambda \sin \lambda.$$

Она показываетъ, что отклоненіе вертикали достигаетъ максимума на широтѣ 45° ³⁴⁾. Возвращаясь къ формулѣ (5) и принимая во вниманіе выраженіе $q = q_0 \cos(\lambda - \alpha)$, мы при тѣхъ же приближеніяхъ найдемъ, что

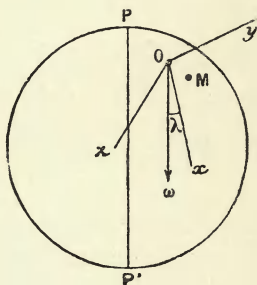
$$mg = A_0 \left[\cos \alpha - \frac{1}{289} \cos(\lambda - \alpha) \cos \lambda \right] = A_0 \left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \lambda \right).$$

Измѣненіе вѣса, обусловленное вращеніемъ земли, пропорціонально квадрату косинуса широты.

189. Движеніе относительно поверхности земли. — Пусть O будетъ точка, связанная съ поверхностью земли на мѣстѣ наблюденія; примемъ за ось z -овъ подвижного трехграннаго угла вертикаль разсматриваемаго мѣста, направленную внизъ; за ось y -овъ возьмемъ направленную на востокъ касательную къ параллели, а ось x -овъ

направимъ по перпендикуляру къ этимъ двумъ прямымъ, обращенному къ югу (фиг. 131). Движущаяся точка M находится подъ дѣйствіемъ двухъ реальныхъ силъ: притяженія земли A и равнодѣйствующей $F(X, Y, Z)$ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ. Чтобы получить относительное движеніе, предположимъ, что земля остается въ покоѣ, и что къ точкѣ M приложены центробѣжная и сложная центробѣжная силы.

Такъ какъ равнодѣйствующая силы притяженія земли и центробѣжной силы есть вѣсь mg тѣла, направленный по вертикали, то достаточно вычислить сложную центробѣжную силу. Для этого



Фиг. 131.

найдемъ составляющія p, q, r мгновеннаго вращенія ω по подвижнымъ осямъ; мы непосредственно усматриваемъ, что векторъ $O\omega$, параллельный линіи полюсовъ, долженъ быть обращенъ къ югу и имѣть своими проекціями

$$p = \omega \cos(Ox, O\omega) = \omega \cos \lambda,$$

$$q = 0,$$

$$r = \omega \sin \lambda.$$

Поэтому проекціи

$$-2m \left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right), \quad -2m \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right), \quad -2m \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right)$$

сложной центробѣжной силы равны соответственно

$$2m \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \quad -2m \left(\omega \sin \lambda \frac{dx}{dt} - \omega \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right), \quad -2m \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt},$$

и уравненія относительнаго движенія будутъ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + 2m \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - 2m \omega \left(\sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= mg + Z - 2m \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Эти формулы, конечно, примѣнимы лишь въ томъ случаѣ, если движущаяся точка находится настолько близко отъ O , чтобы можно было разсматривать вѣсь, какъ силу, параллельную оси Oz и равную mg .

Уравненіе живыхъ силъ будетъ имѣть видъ:

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz + mg dz,$$

ибо члены, въ которые входитъ ω , исчезаютъ.

Поэтому, если для равнодѣйствующей X , Y , Z существуетъ силовая функція U , то мы имѣемъ первый интеграль движенія:

$$\frac{mv^2}{2} = U + mgz + h.$$

190. Свободное паденіе тяжелой точки. — Предположимъ, что паденіе происходитъ въ пустотѣ, т. е. пренебрежемъ сопротивленіемъ воздуха; тогда X , Y , Z будутъ нулями, и уравненія (7) примутъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega \left(\sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - 2\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Предположимъ, что движущаяся точка выходитъ изъ начала въ моментъ $t=0$ безъ относительной начальной скорости. Такъ какъ вторыя части уравненій движенія (8) суть точныя производныя, то

мы можемъ выполнить первое интегрированіе, и, сообразуясь съ начальными данными, мы будемъ имѣть:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2\omega y \sin \lambda, \\ \frac{dy}{dt} &= -2\omega (x \sin \lambda - z \cos \lambda), \\ \frac{dz}{dt} &= gt - 2\omega y \cos \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Чтобы довести интегрированіе до конца, мы можемъ подставить во второе изъ уравненій (8) значенія производныхъ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, получающіяся изъ уравненій (9). Такимъ образомъ получится линейное уравненіе второго порядка, которое мы умѣемъ интегрировать. Выполнивъ интегрированіе и подставивъ найденное значеніе y въ первое и третье изъ уравненій (9), мы посредствомъ двухъ новыхъ квадратуръ найдемъ x и z . Но такъ какъ величина ω очень мала, то мы можемъ также оперировать путемъ послѣдовательныхъ приближеній слѣдующимъ образомъ. Положивъ $\omega = 0$ въ уравненіяхъ (9), мы получимъ:

$$\frac{dx_0}{dt} = 0, \quad \frac{dy_0}{dt} = 0, \quad \frac{dz_0}{dt} = gt,$$

откуда

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{gt^2}{2};$$

въ первомъ приближеніи мы находимъ, какъ и слѣдовало ожидать, тѣ значенія, которыя координаты x , y , z имѣли бы, если бы земля не вращалась. Если подставимъ эти значенія въ правыя части уравненій (9), что приводится къ отбрасыванію ω^2 , то эти уравненія даютъ во второмъ приближеніи:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_1}{dt} = \omega \cos \lambda \, gt^2, \quad \frac{dz_1}{dt} = gt,$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \omega \cos \lambda \, \frac{gt^3}{3}, \quad z_1 = \frac{1}{2} gt^2.$$

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ, что всегда имѣетъ мѣсто маленькое отклоненіе къ востоку. Внося вновь эти значенія въ правыя части

уравнений (9), мы найдемъ въ третьемъ приближеніи:

$$x_2 = \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \frac{gt^3}{6}, \quad y_2 = \omega \cos \lambda \frac{gt^3}{3}, \quad z_2 = \frac{gt^2}{2} - \omega^2 \cos^2 \lambda \frac{gt^4}{6}.$$

Мы видимъ, что, помимо предыдущаго отклоненія къ востоку, появляется новое отклоненіе къ югу; кромѣ того, значеніе координаты z измѣнилось. Но это отклоненіе къ югу и измѣненіе координаты z незначительны.

Г. Спарръ (Sparre, „Bulletin de la Société mathématique de France“, т. XXXIII) далъ приближенное вычисленіе, которое мы развили здѣсь нѣсколько отличнымъ образомъ. Онъ замѣтилъ, что, если желательно сохранить члены, содержащіе ω^2 , то мы должны принять во вниманіе измѣненіе величины g . Тогда, помимо отклоненія къ востоку, имѣетъ мѣсто второе отклоненіе, которое направлено къ югу, если тѣло падаетъ въ колодецъ и, напротивъ, направлено къ сѣверу, если тѣло падаетъ съ высоты башни. Но эти отклоненія чрезвычайно малы и ускользаютъ отъ опытныхъ измѣреній. Наконецъ, г. Рудзкій (Rudski, Ibid., т. XXXIV) нашелъ, что при той степени приближенія, которая взята г. Спарромъ, умѣстно было бы принять во вниманіе влияніе, которое можетъ оказать на движеніе тѣла притяженіе луны.

191. Маятникъ Фуко. — Перейдемъ теперь къ изученію движенія сферическаго маятника, принимая въ расчетъ вращательное движеніе земли. Сохранимъ тѣ же оси, которыми мы пользовались въ предыдущемъ вопросѣ, взявъ начало координатъ въ центрѣ сферы. Помимо притяженія земли на движущуюся точку дѣйствуютъ силы, которыя приводятся къ нормальной реакціи сферы; проекціи этой силы, которую мы обозначимъ черезъ mN , будутъ:

$$-mN \frac{x}{l}, \quad -mN \frac{y}{l}, \quad -mN \frac{z}{l},$$

гдѣ l есть радіусъ сферы; поэтому уравненія относительнаго движенія будутъ

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -N \frac{x}{l} + 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -N \frac{y}{l} - 2\omega \left(\sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - N \frac{z}{l} - 2\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \tag{10}$$

Интеграль живыхъ силъ даетъ

$$v^2 = 2gz + h.$$

Разсмотримъ случай бесконечно малыхъ колебаній; наше приближеніе будетъ заключаться въ томъ, что мы будемъ разсматривать координаты x , y и ихъ производныя по времени t , какъ бесконечно малыя перваго порядка, пренебрегая бесконечно малыми втораго порядка. Допустимъ, кромѣ того, что ω есть величина, сравнимая съ x и y . При такой степени приближенія мы будемъ имѣть $z=l$ (п. 185); третье изъ уравненій (10) приводится къ простому виду $N=g$, а два первыхъ приводятся тогда къ слѣдующимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x + 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{g}{l}y - 2\omega \sin \lambda \frac{dx}{dt}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

эти уравненія опредѣляютъ движеніе маятника въ касательной плоскости къ сферѣ въ ея самой низкой точкѣ. Это линейныя уравненія съ постоянными коэффициентами; мы можемъ интегрировать ихъ посредствомъ квадратуръ. Воспользуемся, однако, другимъ методомъ. Теорема живыхъ силъ даетъ намъ уравненіе:

$$d \frac{v^2}{2} = -\frac{g}{l} (x dx + y dy).$$

Если r и θ суть полярныя координаты проекціи маятника на плоскость xOy , то

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad x dx + y dy = r dr,$$

и, интегрируя уравненіе живыхъ силъ, находимъ:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{gr^2}{l} + h. \quad (12)$$

Составивъ теперь изъ уравненій (10) уравненіе, выражающее теорему о площадяхъ, мы получимъ:

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = -2\omega \sin \lambda \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right);$$

интегрируя, вводя полярныя координаты и полагая $\omega' = \omega \sin \lambda$, имѣемъ:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = -\omega' r^2 + C. \quad (13)$$

Разсмотримъ сначала частный случай, когда маятникъ, будучи въ равновѣсїи въ вертикальномъ положенїи, получаетъ слабый толчокъ. Тогда мы имѣемъ для начальнаго момента $r = 0$; уравненїе (13) даетъ $C = 0$ и приводится къ слѣдующему виду:

$$\frac{d\theta}{dt} + \omega' = 0, \quad \theta = \theta_0 - \omega' t.$$

Наблюдателю, который расположенъ на оси z -овъ, будетъ, слѣдовательно, казаться, что маятникъ качается въ плоскости, которая совершаетъ равномерное вращательное движенїе вокругъ вертикали съ востока къ югу съ угловой скоростью ω' . Эта плоскость совершитъ полный оборотъ за промежутокъ времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{24^h}{\sin \lambda}.$$

Для Парижа мы получили бы приблизительно $T = 32^h$.

Возвратимся къ общему случаю бесконечно малыхъ колебанїй. Уравненїе (13) напишется такъ:

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} + \omega' \right) = C.$$

Поэтому, если положить

$$\frac{d\theta}{dt} + \omega' = \frac{d\varphi}{dt},$$

т. е.

$$\theta + \omega' (t - t_0) = \varphi,$$

то это уравненїе приметъ слѣдующій видъ:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C; \quad (14)$$

полученное уравненїе аналогично уравненїю площадей. Впрочемъ, сдѣланное нами преобразованїе состоитъ лишь въ разысканїи относительнаго движенїя, по отношенїю къ системѣ осей Ox_1y_1z , которая вращается вокругъ вертикали съ постоянной скоростью ω' ; въ

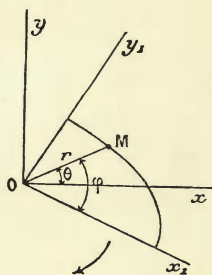
этой системѣ r и φ суть полярныя координаты проекціи движущейся точки. Въ новыхъ перемѣнныхъ уравненіе (12) выразится такъ:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \omega'^2 - 2\omega' \frac{d\varphi}{dt} \right] = -\frac{g}{l} r^2 + h.$$

Замѣняя $r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ черезъ C и пренебрегая членами, порядокъ которыхъ выше второго, мы получимъ уравненіе

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l} r^2 + h. \quad (15)$$

Уравненія (14) и (15) представляютъ собою уравненія площадей и живыхъ силъ въ движеніи точки, притягиваемой къ началу съ силой, пропорціональной разстоянію. Какъ мы видѣли въ п. 159, такая точка описываетъ относительно осей Ox_1y_1 эллипсъ съ цен-



Фиг. 132.

тромъ въ началѣ O ; мы можемъ, слѣдовательно, представлять себѣ движеніе маятника, какъ качаніе по бесконечно малому эллипсу, который имѣетъ центръ O и вращается съ постоянной скоростью вокругъ вертикали (фиг. 132).

Какъ мы видѣли въ п. 159, координаты x_1, y_1 выражаются въ этомъ случаѣ въ функціи отъ t формулами

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} + B \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}, \\ y_1 &= A' \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} + B' \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

гдѣ A, B, A', B' суть постоянныя, которыя зависятъ отъ начальныхъ условий.

Продолжительность качанія по эллипсу будетъ $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; плоскость эллипса сама совершаетъ полный оборотъ за періодъ $T = \frac{24^h}{\sin \lambda}$.

Въ опытѣ Фуко маятникъ, предварительно отклоненный отъ вертикали, пускаютъ безъ начальной скорости относительно земли. Въ началѣ движенія мы имѣемъ, слѣдовательно,

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

а въ относительномъ движеніи, отнесенномъ къ осямъ Ox_1y_1 ,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \omega'.$$

Если мы направимъ ось Ox_1 черезъ начальное положеніе, то при $t = 0$

$$x_1 = r_0, \quad y_1 = 0.$$

Съ другой стороны,

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad y_1 = r \sin \varphi,$$

откуда

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Отсюда мы выводимъ, что

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0 = \omega' r_0.$$

Если мы теперь подставимъ эти начальныя значенія въ уравненія (16) и въ тѣ, которыя получаются изъ нихъ посредствомъ дифференцірованія, то, положивъ $t=0$, мы найдемъ, что

$$A' = 0, \quad A = r_0, \quad B = 0, \quad B' = r_0 \omega' \sqrt{\frac{l}{g}},$$

такъ что движеніе будетъ представлено уравненіями

$$x_1 = r_0 \cos t \sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$y_1 = r_0 \omega' \sqrt{\frac{l}{g}} \sin t \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Подвижныя оси здѣсь совпадаютъ по направленію съ осями траекторіи; длины этихъ осей равны, слѣдовательно,

$$r_0 \text{ и } r_0 \omega' \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Движущаяся точка описываетъ этотъ эллипсъ въ положительномъ направленіи за такой промежутокъ времени, въ теченіе котораго этотъ эллипсъ дѣлаетъ оборотъ вокругъ оси z -овъ въ отрицательномъ направленіи. Отношеніе осей эллипса равно

$$\omega' \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}{\frac{2\pi}{\omega'}} = \frac{T_1}{T}.$$

Въ опытѣ Фуко найдено было, что

$$T_1 = 16^e, \quad T = 32^u;$$

движущаяся точка отклонялась, слѣдовательно, отъ вертикали лишь на разстояніе, меньшее, чѣмъ $\frac{1}{7000}$ начального отклоненія.

ГЛАВА VIII.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ.

I. — ОПРЕДѢЛЕНІЯ И ПРИМѢРЫ.

192. Моменты инерціи. — Съ моментами инерціи приходится имѣть дѣло въ большинствѣ задачъ динамики системъ. Мы прежде всего дадимъ опредѣленіе и теорію моментовъ инерціи, чтобы имѣть возможность непосредственно заняться приложеніями общихъ теоремъ.

193. Опредѣленія моментовъ инерціи. — Хотя въ приложеніяхъ встрѣчаются лишь моменты инерціи относительно осей, однако, полезно ввести слѣдующія опредѣленія. Если дана система матеріальныхъ точекъ, то называютъ:

1° моментомъ инерціи системы относительно плоскости сумму $\sum m \delta^2$ произведеній, получаемыхъ отъ умноженія массы m каждой точки на квадратъ ея разстоянія δ отъ плоскости;

2° моментомъ инерціи относительно или вокругъ оси сумму $\sum m r^2$ произведеній массы m каждой точки на квадратъ ея разстоянія r отъ оси; обыкновенно этотъ моментъ выражаютъ произведеніемъ $M k^2$, гдѣ M есть полная масса системы, а k такъ называемый гираціонный радіусъ системы относительно разсматриваемой оси;

3° моментомъ инерціи относительно точки сумму произведеній массы каждой точки на квадратъ ея разстоянія отъ данной точки.

Проведемъ черезъ точку O оси прямоугольныхъ координатъ x, y, z . Моменты инерціи относительно трехъ координатныхъ плоскостей равны

$$\Sigma m x^2, \quad \Sigma m y^2, \quad \Sigma m z^2;$$

моменты инерціи относительно осей равны

$$\Sigma m (y^2 + z^2), \quad \Sigma m (z^2 + x^2), \quad \Sigma m (x^2 + y^2);$$

наконецъ, моментъ инерціи относительно точки O равенъ

$$\Sigma m (x^2 + y^2 + z^2).$$

Изъ этихъ выражений вытекають слѣдующія теоремы:

a. Моментъ инерціи вокругъ оси равенъ суммѣ моментовъ инерціи относительно двухъ взаимноперпендикулярныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ эту ось.

b. Моментъ инерціи относительно точки равенъ суммѣ моментовъ инерціи относительно трехъ взаимноперпендикулярныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ эту точку, или суммѣ моментовъ инерціи относительно плоскости и перпендикулярной къ ней прямой, которыя проходятъ черезъ эту точку.

4° Произведенія инерціи. — Такъ англійскіе математики называютъ суммы $\Sigma m yz$, $\Sigma m zx$, $\Sigma m xy$, которыя легко можно представить въ видѣ моментовъ инерціи. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ равнодѣлящія плоскости P и P' двугранныхъ угловъ, составляемыхъ плоскостями zOx и zOy ; уравненія плоскостей P и P' суть, $x + y = 0$, $x - y = 0$. Пусть δ и δ' будутъ разстоянія отъ этихъ двухъ плоскостей точки, имѣющей массу m и координаты x, y, z . Имѣемъ:

$$\delta^2 = \frac{1}{2} (x + y)^2, \quad \delta'^2 = \frac{1}{2} (x - y)^2,$$

$$\Sigma m xy = \frac{1}{2} (\Sigma m \delta^2 - \Sigma m \delta'^2);$$

въ послѣднемъ соотношеніи оба члена правой части представляютъ собою моменты инерціи.

194. Сплошныя системы. — Когда разсматриваемая система представляетъ собой сплошное тѣло, то моментъ инерціи выражается

интеграломъ. Линію, или поверхность, или объемъ мы разбиваемъ на бесконечно малыя части, которыя имѣютъ координаты x, y, z и массу qds , или $q d\sigma$, или $q dv$, гдѣ q обозначаетъ линейную или поверхностную, или объемную плотность. Сумма вида $\sum mx^2$ перейдетъ соотвѣтственно въ $\int qx^2 ds$ или $\iint qx^2 d\sigma$, или $\iiint qx^2 dv$. Вычисленіе встрѣчающихся здѣсь интеграловъ часто можетъ быть упрощено.

Примѣры. — 1° Моментъ инерціи бесконечно тонкаго однороднаго прямолинейнаго стержня относительно его центра. — Назовемъ черезъ $2l$ длину стержня и черезъ q его линейную плотность (массу единицы длины). Моментъ инерціи μ стержня относительно его середины O есть функція длины l . Его приращеніе $d\mu$, соотвѣтствующее приращенію dl величины l , есть моментъ инерціи двухъ бесконечно малыхъ частей стержня, имѣющихъ массу $q dl$ и расположенныхъ каждая на разстояніи l отъ середины. Слѣдовательно,

$$d\mu = 2l^2 q dl,$$

откуда, интегрируя и замѣчая, что μ обращается въ нуль при $l=0$,

$$\mu = \frac{2}{3} ql^3 = \frac{1}{3} Ml^2,$$

гдѣ M есть масса стержня.

2° Моментъ инерціи однороднаго цилиндра вращенія относительно его оси. — Пусть h будетъ высота, R — радиусъ цилиндра, q — его плотность и μ — искомый моментъ инерціи. Масса цилиндра есть

$$M = \pi R^2 h q.$$

Если R получаетъ приращеніе dR , то масса увеличивается на

$$dM = 2\pi R h q dR.$$

Это есть масса бесконечно тонкаго слоя, заключеннаго между цилиндрической поверхностью радиуса R и цилиндрической поверхностью радиуса $R + dR$. Всѣ элементы этого слоя находятся на одномъ разстояніи R отъ оси. Приращеніе $d\mu$ момента энерціи μ есть моментъ инерціи этого слоя, т. е. $d\mu = R^2 dM$. Поэтому

$$d\mu = R^2 (2\pi R h q dR).$$

Интегрируя и замѣчая, что μ обращается въ нуль при $R = 0$, получимъ:

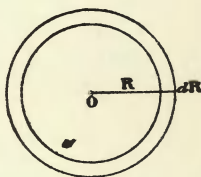
$$\mu = \frac{1}{2} \pi R^4 h q = M \frac{R^2}{2}.$$

Гираціонный радіусъ k цилиндра вокругъ его оси равенъ, слѣдовательно,

$$\frac{1}{2} R \sqrt{2}.$$

3° Моменты инерціи однороднаго шара. — Пусть ϱ будетъ плотность. Найдѣмъ сперва моментъ инерціи μ шара относительно его центра; этотъ моментъ есть функція радіуса R ; приращеніе $d\mu$ момента, соотвѣтствующее приращенію dR радіуса R , есть моментъ инерціи сферическаго слоя массы $4\pi R^2 \varrho dR$ относительно точки, которая находится отъ точекъ этого слоя на постоянномъ разстояніи, равномъ R (фиг. 133), т. е.

$$d\mu = 4\pi R^2 \varrho dR \times R^2;$$



Фиг. 133.

взявъ интеграль между предѣлами 0 и R , мы получимъ:

$$\mu = \frac{4}{5} \pi \varrho R^3.$$

Моментъ инерціи относительно діаметральной плоскости равенъ

$$\frac{1}{3} \mu = \frac{4}{15} \pi \varrho R^3,$$

ибо моментъ инерціи относительно центра равенъ суммѣ моментовъ инерціи относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ діаметральныхъ плоскостей, а моменты инерціи относительно всѣхъ діаметральныхъ плоскостей равны между собой. Отсюда слѣдуетъ, что моментъ инерціи относительно діаметра, равный суммѣ моментовъ инерціи относительно двухъ взаимноперпендикулярныхъ плоскостей, равенъ

$$I = \frac{2}{3} \mu = \frac{8}{15} \pi \varrho R^3 = M \frac{2}{5} R^2,$$

гдѣ $M = \frac{4}{3} \pi \varrho R^3$ есть полная масса шара; гираціонный радіусъ около діаметра равенъ, слѣдовательно, $R \frac{\sqrt{10}}{5}$.

4° Моменты инерции однородного эллипсоида. — Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

будетъ уравненіе эллипсоида и пусть ρ будетъ его плотность. Его моментъ инерции относительно плоскости xOy равенъ

$$\Sigma m z^2 = \iiint \rho z^2 dx dy dz,$$

гдѣ тройной интегралъ нужно распространить на объемъ всего эллипсоида.

Введя новыя переменныя

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz',$$

мы найдемъ, что

$$\Sigma m z^2 = abc^3 \iiint \rho z'^2 dx' dy' dz';$$

новый тройной интегралъ, который нужно распространить на объемъ шара

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0,$$

выражаетъ моментъ инерции этого шара радиуса 1 относительно діаметральной плоскости и равенъ $\frac{4}{15} \pi \rho$; такимъ образомъ,

$$\Sigma m z^2 = \frac{4}{15} \pi \rho abc^3 = M \frac{c^2}{5},$$

гдѣ $M = \frac{4}{3} \pi \rho abc$ есть масса эллипсоида

Точно такимъ же образомъ мы найдемъ, что моменты инерции эллипсоида относительно плоскостей xOz и yOz равны соотвѣтственно

$$M \frac{b^2}{5}, \quad M \frac{a^2}{5};$$

слѣдовательно, моменты инерции относительно осей Ox , Oy , Oz равны:

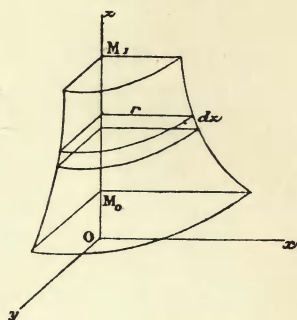
$$M \frac{b^2 + c^2}{5}, \quad M \frac{c^2 + a^2}{5}, \quad M \frac{a^2 + b^2}{5},$$

а моментъ инерции относительно центра равенъ

$$M \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}.$$

5° Моментъ инерции однороднаго тѣла вращенія, ограниченнаго плоскостями двухъ параллельныхъ круговъ, вокругъ оси вращенія. — Пусть $z = \varphi(x)$ будетъ уравне-

не меридиана поверхности вращения, ось которой есть Oz (фиг. 134). Разобьемъ тѣло на цилиндрическіе элементы системою плоскостей, перпен-



Фиг. 134.

дикулярныхъ къ оси; моментъ инерціи одного изъ этихъ цилиндровъ, имѣющаго радіусъ r и высоту dz , согласно пункту 2, равенъ

$$\frac{1}{2} \pi r^4 dz,$$

и если z_0 и z_1 суть координаты крайнихъ параллелей, то для момента инерціи всего тѣла мы найдемъ выраженіе

$$Mk^2 = \frac{\pi \rho}{2} \int_{z_0}^{z_1} r^4 dz,$$

при чемъ r и z связаны соотношеніемъ $z = \varphi(r)$; мы видимъ, что въ этомъ случаѣ моментъ инерціи вычисляется посредствомъ простого интеграла.

Найдемъ въ видѣ приложенія моментъ инерціи объема однороднаго конуса вращения относительно его оси. Взявъ начало координатъ въ вершинѣ и обозначивъ соотвѣтственно черезъ θ , R и H половину угла при вершинѣ, радіусъ основанія и высоту конуса, имѣемъ:

$$r = z \tan \theta, \quad R = H \tan \theta, \quad M = \frac{1}{3} \pi \rho R^2 H,$$

$$Mk^2 = \frac{\pi \rho}{2} \int_0^H z^4 \tan^4 \theta dz = \frac{\pi \rho H^5 \tan^4 \theta}{10} = M \frac{3}{10} R^2.$$

II. — ОБЩІЯ ТЕОРЕМЫ.

195. Измѣненіе момента инерціи системы вокругъ оси, перемѣщающейся параллельно самой себѣ. — Это измѣненіе опредѣляется слѣдующей теоремой:

Моментъ инерціи системы вокругъ оси равенъ моменту инерціи вокругъ другой оси, которая проходитъ черезъ центръ тяжести системы параллельно первой оси, сложенному съ произведеніемъ массы всей системы на квадратъ разстоянія между обѣими осями.

Пусть AB будетъ произвольно заданная ось; примемъ ось Gz , параллельную предыдущей и проходящую черезъ центръ тяжести G , за ось z -овъ, и пусть $x=a$, $y=b$ будутъ уравненія данной оси AB . Моментъ инерціи вокругъ этой оси равенъ

$$\Sigma m [(x-a)^2 + (y-b)^2],$$

что можно представить въ видѣ

$$\Sigma m (x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) \Sigma m - 2a \Sigma mx - 2b \Sigma my;$$

но суммы Σmx , Σmy равны нулю, такъ какъ центръ тяжести лежитъ на оси z -овъ; слѣдовательно, моментъ инерціи вокругъ оси AB выражается такъ:

$$\Sigma m (x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) \Sigma m.$$

Такъ какъ $\Sigma m (x^2 + y^2)$ есть моментъ инерціи вокругъ оси Gz и $(a^2 + b^2)$ есть квадратъ разстоянія между обѣими осями, то теорема доказана.

Обозначимъ черезъ I моментъ инерціи вокругъ оси AB , черезъ I_G — моментъ вокругъ параллельной оси, проходящей черезъ центръ тяжести G , и черезъ d — разстояніе между этими двумя осями; тогда мы получимъ: $I = I_G + Md^2$. Далѣе, пусть I' будетъ моментъ инерціи вокругъ оси, параллельной тому же направленію, но отстоящей отъ центра тяжести на разстояніи d' ; имѣемъ попрежнему: $I' = I_G + Md'^2$. Вычтя второе равенство изъ перваго, найдемъ, что

$$I - I' = M(d^2 - d'^2).$$

Эта формула даетъ возможность вычислить I' , если мы знаемъ I и положеніе центра тяжести.

Изъ теоремы $I = I_G + Md^2$ вытекаетъ, что между всѣми осями, параллельными данному направленію, моментъ инерціи имѣетъ значеніе минимумъ вокругъ той оси, которая проходитъ черезъ центръ тяжести. Геометрическое мѣсто осей, вокругъ которыхъ этотъ моментъ имѣетъ постоянное значеніе, есть поверхность цилиндра вращенія, ось котораго проходитъ черезъ центръ тяжести.

откуда найдемъ для момента инерціи выраженіе:

$$\begin{aligned}\Sigma mr^2 &= \alpha^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + \gamma^2 \Sigma m (x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\beta\gamma \Sigma m yz - 2\gamma\alpha \Sigma m zx - 2\alpha\beta \Sigma m xy.\end{aligned}$$

Обозначивъ черезъ A, B, C, D, E, F входящія въ эту формулу постоянныя суммы, мы получаемъ:

$$\Sigma mr^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta. \quad (1)$$

Постоянныя A, B, C суть моменты инерціи вокругъ координатныхъ осей, а D, E, F суть произведенія инерціи.

Чтобы объяснить геометрической смыслъ полученнаго нами результата, отложимъ на каждой прямой Ox съ обѣихъ сторонъ точки O длину OP , опредѣляемую равенствомъ $\frac{1}{OP} = \sqrt{\Sigma mr^2}$, и разыщемъ геометрическое мѣсто точекъ $P(X, Y, Z)$. Прежде всего:

$$\alpha = \frac{X}{OP}, \quad \beta = \frac{Y}{OP}, \quad \gamma = \frac{Z}{OP} \quad \text{и} \quad \frac{1}{OP^2} = \Sigma mr^2;$$

внеся эти значенія въ уравненіе (1), мы получимъ уравненіе

$$1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY, \quad (2)$$

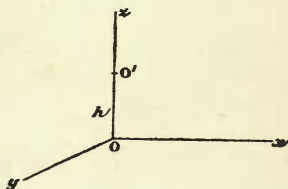
т. е. уравненіе поверхности второго порядка. Эта поверхность, имѣющая центръ въ началѣ координатъ, должна быть эллипсоидомъ; дѣйствительно, радіусъ-векторъ OP всегда имѣетъ вещественное и конечное значеніе, такъ какъ онъ равенъ $\frac{1}{\Sigma mr^2}$, а моментъ инерціи есть существенно положительная величина. Исключеніе представляетъ лишь случай, когда всѣ матеріальныя точки расположены на одной прямой линіи съ точкой O ; въ этомъ случаѣ моментъ инерціи относительно этой прямой равенъ нулю, соотвѣтственное значеніе радіуса-вектора OP обращается въ безконечность, и эллипсоидъ обращается въ цилиндръ вращенія вокругъ этой прямой.

Эллипсоидъ, уравненіе котораго мы сейчасъ вывели, получилъ названіе эллипсоида инерціи; его плоскости и оси симметріи называются главными плоскостями и главными осями инерціи относительно разсматриваемой точки. Эллипсоидъ инерціи относительно центра тяжести называется центральнымъ эллипсоидомъ инер-

ции. Такимъ образомъ, въ каждой точкѣ существуютъ вообще только три главные оси инерціи; если же эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія, то существуетъ безконечное множество главныхъ осей въ плоскости экватора; если эллипсоидомъ инерціи служить сфера, то всякая ось, проходящая черезъ разсматриваемую точку, является главной осью въ этой точкѣ.

Если относительно точки O построенъ эллипсоидъ инерціи, то моментъ инерціи вокругъ оси $O\delta$ равенъ $\frac{1}{OP^2}$, гдѣ P есть точка, въ которой ось $O\delta$ встрѣчаетъ эллипсоидъ. Между всѣми осями, проведенными черезъ точку O , моментъ инерціи имѣетъ наименьшее значеніе для той оси, которая совпадаетъ съ большой осью эллипсоида.

197. Условіе, при которомъ ось Oz есть главная ось для точки O . — Найдемъ, при какомъ условіи одна изъ координатныхъ осей, наприимѣръ Oz , есть главная ось инерціи для точки O .



Фиг. 136.

Для этого необходимо, чтобы уравненіе эллипсоида не содержало членовъ первой степени относительно z , т. е. чтобы имѣли мѣсто равенства

$$D = 0, \quad E = 0,$$

или

$$\sum m y z = 0, \quad \sum m x z = 0. \quad (3)$$

Ось z -овъ, которая является главной осью инерціи для точки O , не будетъ, вообще говоря, главной осью инерціи для какой-нибудь другой точки O' , которая лежитъ на оси z -овъ на разстояніи $OO' = h$ отъ точки O (фиг. 136). Чтобы ось Oz была также главной осью инерціи для точки O' , необходимо, согласно предыдущему, присоединить къ условіямъ (3) еще новыя условія

$$\sum m y (z - h) = 0, \quad \sum m x (z - h) = 0, \quad (4)$$

которые получаются путем перенесения начала координатъ въ точку O' . Эти уравненія въ связи съ уравненіями (3) даютъ:

$$\Sigma my = 0, \quad \Sigma mx = 0.$$

Уравненія эти выражаютъ, что ось Oz проходитъ черезъ центръ тяжести. Если это геометрическое условіе выполняется, то ось z -овъ служить главной осью инерціи для любой своей точки и, въ частности, для центра тяжести, потому что найденныя нами условія удовлетворяются при всякомъ значеніи h . Мы имѣемъ, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

ТЕОРЕМА. — Главная ось инерціи относительно центра тяжести служитъ также главной осью инерціи для любой своей точки. Обратно, если какая-либо ось есть главная для двухъ своихъ точекъ, то она также есть главная ось для всѣхъ своихъ точекъ и проходитъ черезъ центръ тяжести.

Если однородное тѣло имѣетъ плоскость симметріи, то ясно, что эта плоскость будетъ главной для всѣхъ своихъ точекъ; дѣйствительно, принявъ эту плоскость за плоскость xOy , мы при любомъ началѣ координатъ имѣемъ

$$\Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0,$$

такъ какъ каждой массѣ съ координатами (x, y, z) , соотвѣтствуетъ равная ей масса съ координатами $(x, y, -z)$.

Точно такъ же, если однородное тѣло обладаетъ осью симметріи, то эта ось будетъ главной для любой изъ своихъ точекъ.

198. Не всякій эллипсоидъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ эллипсоидъ инерціи. — Дѣйствительно, если отнести эллипсоидъ инерціи къ его осямъ, то онъ будетъ имѣть уравненіе

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

гдѣ

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2)$$

суть моменты инерціи вокругъ трехъ осей; легко видѣть, что любой изъ моментовъ долженъ быть не больше суммы двухъ другихъ. Напримѣръ, если эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія, то

онъ можетъ быть сколь-угодно удлиненнымъ; если же онъ сплюснутъ, то сжатіе должно быть не больше, чѣмъ $\frac{1}{2} (2 - \sqrt{2})^{85}$.

Если тѣло представляетъ собою пластинку безконечно малой толщины, лежащую въ плоскости xOy , то, вслѣдствіе симметріи, одной изъ главныхъ осей служитъ ось Oz ; пусть оси Ox и Oy будутъ другими двумя главными осями инерціи. Такъ какъ въ этомъ случаѣ $z = 0$, то $C = A + B$.



ПРИМѢЧАНІЯ РЕДАКТОРА.

1) (стр. 14). Положимъ, напимѣръ, что $Z_1 \neq 0$. Въ силу соотношенія (7) и равенствъ $L_1 = yZ_1 - zY_1$, $M_1 = zX_1 - xZ_1$ мы будемъ имѣть:

$$-N_1 Z_1 = L_1 X_1 + M_1 Y_1 = Z_1 (yX_1 - xY_1),$$

откуда

$$N_1 = xY_1 - yX_1.$$

2) (стр. 18). Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что переходъ отъ полюса O къ полюсу O' , лежащему на основаніи вектора OR , не измѣняетъ главнаго момента, ибо въ этомъ случаѣ моментъ вектора OR около полюса O' равенъ нулю.

3) (стр. 18). Ибо

$$X' = R' \cos (R'x), \quad Y' = R' \cos (R'y), \quad Z' = R' \cos (R'z),$$

$$L' = G' \cos (G'x), \quad M' = G' \cos (G'y), \quad N' = G' \cos (G'z)$$

и

$$\cos (R'x) \cos (G'x) + \cos (R'y) \cos (G'y) + \cos (R'z) \cos (G'z) = \cos (R'G').$$

4) (стр. 20). Если O есть общая точка сходящихся векторовъ, образующихъ систему Σ , и OR есть результирующий векторъ этой системы, то, рассматривая векторъ OR , какъ систему σ , состоящую изъ одного вектора R , находимъ, что въ точкѣ O главные векторы обѣихъ системъ Σ и σ равны OR , а главные моменты равны нулю.

5) (стр. 34). Данное въ текстѣ опредѣленіе геометрической производной вектора опирается на понятіе о предѣльномъ векторѣ, — понятіе, которое само нуждается въ опредѣленіи. Вполнѣ строгимъ будетъ слѣдующее опредѣленіе: геометрической производной переменнаго вектора называется векторъ, коего проекціи на осяхъ координатъ суть аналитическія производныя отъ соотвѣтственныхъ проекцій рассматриваемаго вектора.

6) (стр. 36). Началомъ этой дуги мы будемъ считать точку m .

7) и 8) (стр. 37). Соображенія, изложенныя въ текстѣ, представляютъ собой попытку наглядно пояснить понятія о полярномъ и осевомъ векторахъ, но они не содержатъ строгаго опредѣленія этихъ понятій.

Въ изслѣдованіяхъ надъ векторами одни векторы задаются непосредственно геометрически или физически (сила, скорость); другіе векторы опредѣленнымъ образомъ строятся по заданнымъ векторамъ. Сообразно этому векторы и аналитически опредѣляются либо непосредственнымъ заданіемъ, либо опредѣленными выраженіями въ элементахъ другихъ векторовъ. Если мы измѣнимъ систему координатъ такимъ образомъ, что сообщимъ каждой

оси противоположноен аправленіе, то выраженія проекцій вектора либо мѣняють знакъ, либо остаются безъ измѣненія; въ первомъ случаѣ векторъ называется полярнымъ, во второмъ—осевымъ. Если X, Y, Z суть проекціи (слагающія) силы F , то при указанномъ обращеніи осей, онѣ замѣняются черезъ $-X, -Y, -Z$; это векторъ полярный. Такимъ же образомъ мѣняются знаки при обращеніи осей проекціи скорости и ускоренія. Но моментъ F' вектора F , приложеннаго въ точкѣ (x, y, z) , относительно начала координатъ имѣетъ проекціи

$$yZ - zY, zX - xZ, xY - yX,$$

которыя при обращеніи осей не мѣняются, такъ какъ величины X, Y, Z переходятъ въ $-X, -Y, -Z$, а x, y, z въ $-x, -y, -z$; это осевой векторъ. Моментъ F'' вектора F' , приложеннаго въ точкѣ (x, y, z) , относительно начала координатъ имѣетъ проекціи

$$xH - Xr^2, yH - Yr^2, zH - Zr^2,$$

гдѣ

$$H = xX + yY + zZ, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

эти проекціи мѣняютъ свои знаки при обращеніи осей, а потому это векторъ полярный.

На первый взглядъ это опредѣленіе находится въ противорѣчій съ тѣмъ, которое дано въ текстѣ, такъ какъ тамъ сказано, что полярный векторъ не зависитъ отъ направленія осей. Но именно потому, что полярный векторъ задается геометрически независимо отъ осей (опредѣленно ориентированъ въ пространствѣ), его проекціи мѣняютъ свои знаки при обращеніи осей.

9) (стр. 47). Т. е. центральный уголь, опирающийся на дугу, равную радіусу. Число градусовъ этого угла равно $180:\pi$.

10) (стр. 57). Полагая, какъ и раньше, $A = a \cos \alpha$, $-B = a \sin \alpha$, имѣемъ:

$$x = ae^{-kt} \cos(\omega t + \alpha);$$

слѣдовательно, скорость v опредѣляется равенствомъ

$$v = -ae^{-kt} [k \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

Положивъ $k = b \sin \beta$, $\omega = b \cos \beta$ получимъ:

$$v = -abe^{-kt} \sin(\omega t + \alpha + \beta);$$

поэтому $v = 0$ тогда и только тогда, когда

$$t = -\frac{\alpha + \beta}{\omega} + n \frac{\pi}{\omega},$$

гдѣ n есть цѣлое число. Значеніямъ t , опредѣляемымъ послѣднимъ равенствомъ, отвѣчаютъ значенія x , коихъ абсолютныя величины опредѣляются равенствомъ:

$$|x| = ae^{\frac{k(\alpha + \beta)}{\omega} - \frac{k\pi}{\omega} n} |\cos(n\pi - \beta)| = ae^{\frac{k(\alpha + \beta)}{\omega} - \frac{k\pi}{\omega} n} \cos \beta,$$

при чемъ знакъ $| \quad |$ означаетъ абсолютную величину.

11) (стр. 60). Въ логариѣмической спирали

$$r = e^{-\frac{k}{\omega}(0 - \alpha)}$$

уголъ μ между продолженіемъ радіуса вектора и касательной, проведенной въ направленіи возрастающихъ угловъ θ , опредѣляется равенствомъ

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'} = -\frac{\omega}{k}.$$

Радіусъ-векторъ r , отрѣзокъ касательной и отрѣзокъ оси абсциссъ образуютъ треугольникъ, въ которомъ μ есть внѣшній уголъ. Пусть α и λ будутъ внутренніе углы этого треугольника, образуемые осью x -овъ съ касательною и радіусомъ-векторомъ. Тогда $\mu = \alpha + \lambda$ и при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ имѣемъ: $\lambda = \mu - \frac{\pi}{2}$, т. е. радіусы векторы OM_1 , OM_2 , OM_3 расположены на одной прямой, образующей съ осью x -овъ уголъ $\mu - \frac{\pi}{2}$.

12) (стр. 81). Это значитъ, что оба трехгранныхъ угла ориентированы такъ, какъ это указано въ п. 8, стр. 9 и 10.

13) (стр. 86). Линейчатая поверхность есть геометрическое мѣсто прямыхъ.

14) (стр. 86). Поверхность Σ называютъ подвижнымъ аксоидомъ, а поверхность Σ_1 — неподвижнымъ.

15) (стр. 181). Ибо моментъ каждой изъ реакцій R относительно оси Oz равенъ нулю.

16) (стр. 191). Т. е. x , y , z суть координаты произвольной точки на дугѣ ds .

17) (стр. 196). Въ разсматриваемомъ случаѣ второе изъ уравненій (2), т. е. уравненіе $S\xi = \int \int x d\sigma$ приводится къ виду:

$$S\xi = \int_a^b \int_{y_0}^{y_1} x dx dy \sin \alpha = \sin \alpha \int_a^b \left(x dx \int_{y_0}^{y_1} dy \right) = \sin \alpha \int_a^b x (y_1 - y_0) dx.$$

18) (стр. 200). Предполагается, что въ случаѣ необходимости возможно будетъ разложить разсматриваемый объемъ на конечное число частей, изъ которыхъ каждая въ отдѣльности ограничена такъ, какъ это указано въ текстѣ. Для такого разложенія часто достаточно описать около тѣла цилиндрическую поверхность, образующія которой параллельны оси z -овъ.

19) (стр. 216). Пренебрегая безконечно малыми второго порядка, полагаютъ

$$T_1 = T + dT, \quad \alpha_1 = \alpha + d\alpha;$$

тогда

$$T_1 \alpha_1 - T \alpha = T d\alpha + \alpha dT + d\alpha dT = d(T\alpha),$$

при чемъ вновь отбрасываютъ безконечно малую $dT d\alpha$ второго порядка.

20) (стр. 217). Если сила F лежитъ постоянно въ одной плоскости съ осью x -овъ, то моментъ $yZ - zY$ силы F относительно этой оси равенъ нулю, и тогда первое изъ уравненій (3) (§ 131) можетъ быть написано въ видѣ:

$$yT_y - zT_z = \text{const.}$$

21) (стр. 256). Интегрируя, найдемъ, что

$$t = \frac{1}{k} \lg \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

и потому

$$T = \frac{1}{k} \lg \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2}}{a}.$$

22) (стр. 258). А именно:

$$t - t_0 = \mp 4\mu \sqrt{m} \int_{u_0}^u \frac{du}{(u^2 - h)^2}.$$

Если h есть отрицательное число, то $\frac{1}{(u^2 - h)^2}$ есть непрерывная функція отъ u при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ u ; поэтому t остается конечнымъ для всѣхъ вещественныхъ значеній u ; а, слѣдовательно, и для всѣхъ положительныхъ значеній x .

23) (стр. 267). Опреѣленность понимается здѣсь въ томъ смыслѣ, что сила выражается функціей отъ $t, x, y, z, x', \dots$, не содержащей произвольныхъ постоянныхъ.

24) (стр. 268). Умноживъ обѣ части данного равенства на $\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2$, мы приведемъ его къ виду:

$$\left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) x^2 - \mu = \left[\left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) t + x_0 v_0 \right]^2.$$

Извлекая квадратные корни, дифференцируя и сокращая на $\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2$, будемъ имѣть:

$$xx' : \sqrt{\left(\frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 \right) x^2 - \mu} = 1;$$

поэтому

$$x'^2 = \frac{\mu}{x_0^2} + v_0^2 - \frac{\mu}{x^2},$$

откуда, дифференцируя, имѣемъ:

$$2x'x'' = 2 \frac{\mu}{x^3} x', \quad \text{т. е.} \quad x'' = \frac{\mu}{x^3}.$$

25) (стр. 269). Интегрируемъ равенства

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m \sin t, \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = m \sqrt{1 - v^2} \quad \text{и т. д.}$$

26) (стр. 271). Въ уравненіяхъ (2) и (2') полагаемъ $x = a$, $y = b$, $t = t_1 = (v_0 \sin \alpha) : g$.

27) (стр. 272). Перенесемъ начало координатъ въ вершину параболы: уравненіе приметъ видъ

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Давъ оси y обратное направленіе и переимѣнивъ названія осей, имѣемъ:

$$y^2 = 2 \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} x;$$

слѣдовательно, параметръ параболы равенъ $(v_0^2 \cos^2 \alpha) : g$. Директрисса и старая ось x -овъ параллельны и расположены по разныя стороны отъ вершины параболы, разстоянія же ихъ отъ этой вершины соответственно равны

$$(v_0^2 \cos^2 \alpha) : 2g \text{ и } (v_0^2 \sin^2 \alpha) : 2g.$$

Отсюда слѣдуетъ, что разстояніе между директриссой и старой осью x -овъ равно $v_0^2 / 2g$ и не зависитъ отъ α .

28) (стр. 274) Въ моментъ t сопротивленіе направлено по прямой

$$\frac{\xi - x}{R_x} = \frac{\eta - y}{R_y} = \frac{\zeta - z}{R_z},$$

гдѣ ξ , η , ζ суть текущія координаты. Скорость направлена по прямой

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'},$$

а такъ какъ по допущенію эти двѣ прямыя совпадаютъ, то

$$\frac{x'}{R_x} = \frac{y'}{R_y};$$

съ другой стороны,

$$\frac{x''}{R_x} = \frac{y''}{R_y};$$

сопоставляя двѣ послѣднія пропорціи, получимъ:

$$y'x'' - x'y'' = 0, \text{ или } \frac{y'x'' - x'y''}{x'^2} = 0,$$

т. е. $d \frac{y'}{x'} = 0$, откуда

$$y' = Cx' \text{ и } y = Cx + C'.$$

29) (стр. 278) Можемъ положить $q = q_1^n$, гдѣ $q_1 = \cos \alpha : \left[tg \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^a$.

При $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ это выраженіе обращается въ $\frac{0}{0}$. Примѣняя правило Делопиталья, находимъ, что, при $\lim \alpha = -\frac{\pi}{2}$,

$$\lim q_1 = -\frac{2}{a} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cos^2 \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \left[tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{1-a} = 0,$$

ибо $1 - a > 0$.

30) (стр. 319). Пользуясь уравненіями

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0$$

траекторіи и равенствомъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

можно выразить x, y, z, x', y', z' въ функціи отъ s . Если, напримѣръ, уравненія траекторіи даны въ видѣ или приводятся къ виду $y = u(x), z = v(x)$, то

$$s - s_0 = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + u'^2 + v'^2} dx,$$

откуда x опредѣляется, какъ функція отъ s . Итакъ, допустимъ, что имѣемъ:

$$x = q_1(s), \quad y = q_2(s), \quad z = q_3(s).$$

Сила F и ея слагающія X, Y, Z задаются вообще, какъ функціи отъ $t, x, y, z, x', \dots$ а потому можно считать, что и

$$F_t = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}$$

есть нѣкоторая функція $\varphi(s, t)$ отъ s и t . Равенство

$$F_t = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

обращается въ

$$\varphi(s, t) = m \frac{d^2s}{dt^2},$$

и вопросъ сводится къ интегрированію этого дифференціального уравненія второго порядка. Форма траекторіи больше никакой роли не играетъ, и мы имѣемъ теперь слѣдующую задачу: на прямолинейной или криволинейной траекторіи движется точка M такъ, что между временемъ, пройденной дугой и ускореніемъ существуетъ соотношеніе

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = \varphi(s, t).$$

Найти конечную зависимость между s и t .

31) (стр. 320). Ибо координата z каждой точки траекторіи меньше, чѣмъ отрѣзокъ a , отсѣкаемый на оси z -овъ плоскостью Π , имѣющей уравненіе $z - a = 0$, и вмѣстѣ съ тѣмъ $v^2 = 2g(a - z)$.

32) (стр. 322). Допустимъ, что z , будучи функціей отъ s , разлагается по стокрѣ Тэйлора вокругъ точки $s = l$. Обозначая черезъ $\left(\frac{d^k z}{ds^k}\right)_l$ значеніе $\frac{d^k z}{ds^k}$ при $s = l$, найдемъ, что

$$z = a + \frac{1}{1.2} \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)_l (s - l)^2 + \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{d^3 z}{ds^3}\right)_l (s - l)^3 + \dots,$$

ибо $z = a$ при $s = l$ и $\left(\frac{dz}{ds}\right)_l = 0$. Изъ указаннаго разложенія слѣдуетъ, что $z - a$ есть бесконечно малая того же порядка, что и $(s - l)^2$, если только $\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_l \neq 0$. Если же $\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_l = 0$, но $\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_l \neq 0$, то $z - a$ есть бесконечно малая третьяго порядка относительно $s - l$, а $\frac{1}{\sqrt{z - a}}$ есть бесконечно большая порядка $\frac{3}{2}$ относительно $\frac{1}{s - a}$.

33) (стр. 338). Когда точка M , вынужденная оставаться на поверхности конуса вращения, имѣющаго вертикальную ось, движется подъ дѣйствіемъ силы тяжести, то проекція этой силы на касательную плоскость къ конусу въ точкѣ M постоянно проходитъ черезъ его вершину O и имѣетъ постоянную величину p . Развернемъ конусъ, преобразовавъ его въ плоскость, и построимъ траекторію точки, которая вынуждена оставаться въ этой плоскости и движется въ ней подъ дѣйствіемъ постоянной силы p , исходящей изъ точки O . Навернувъ обратно плоскость на прежній конусъ, мы получимъ траекторію движенія точки по этому конусу подъ дѣйствіемъ силы тяжести.

34) (стр. 357). $\alpha = \frac{1}{289.2} \sin(2\lambda) \leq \frac{1}{289.2}$. Равенство имѣетъ мѣсто при $\lambda = 45^\circ$.

35) (стр. 378). Обозначивъ черезъ a, b, c полуоси эллипсоида инерціи, имѣемъ:

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma m(y^2 + z^2)}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\Sigma m(z^2 + x^2)}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Sigma m(x^2 + y^2)}}.$$

Если эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращения, — напримѣръ, около оси $2c$ то $a = b$, откуда

$$\Sigma mx^2 = \Sigma my^2, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2\Sigma mx^2}}.$$

Когда, сверхъ того, $a > c$, т. е. эллипсоидъ сплюснутъ, то сплюсненіе выражается дробью

$$\frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a} = 1 - \sqrt{\frac{1 + \frac{\Sigma m z^2}{2\Sigma mx^2}}{2}} < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}).$$



<http://mathesis.ru>

Книгоиздательство „Матезисъ”

Одесса, Новосельская, 66.



ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА ИЗДАНИЕ:

Густавъ Ми

профессоръ и директоръ Физическаго Института Грейфсвальдскаго
Университета

КУРСЪ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА И МАГНИТИЗМА

Экспериментальная физика мірового эѳира
для физиковъ, химиковъ и электротехниковъ

Разрѣшенный авторомъ переводъ съ нѣмецкаго **В. В. СОКОЛОВА**
подъ редакціей заслуженнаго профессора **О. Д. ХВОЛЬСОНА.**

Въ двухъ частяхъ. Съ 361 рисункомъ.

Около 50 печатныхъ листовъ.

СОДЕРЖАНИЕ:

Часть I. ЭЛЕКТРОСТАТИКА.

Главы I—XI: Общія свойства электрическаго поля.— Электрическое напряженіе.— Электрическій зарядъ.— Электрическія свойства изоляторовъ.— Электрическое поле внутри проводниковъ.— Прохожденіе электричества черезъ электроны.— Электрическая проводимость въ газахъ.— Тлѣющій разрядъ.— Разрядъ въ формѣ вольтовой дуги и электрическія искры.— Радиоактивность.— Металлическіе проводники.— Заключение.

Часть II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.

Главы I—IX: Общія свойства магнитнаго поля.— Электрическое напряженіе и сила тока.— Силовыя дѣйствія магнитнаго поля.— Появленіе и исчезновеніе магнитнаго поля.— Магнитныя свойства веществъ. Технические примѣненія электромагнитныхъ силовыхъ дѣйствій.— Электромагнитныя колебанія.— Принципъ релятивности (относительн.).— Указатель

Къ русскому изданію

Ученіе объ электрическихъ и магнитныхъ явленіяхъ подверглось за послѣднее десятилѣтіе коренному преобразованію. Не только были открыты новыя явленія, между которыми явленія радиоактивности занимаютъ первое мѣсто, но и основы теоріи, взглядъ на сущность и міровое значеніе

электромагнитныхъ явленій совершенно измѣнились. Развилась и, повидимому, твердо установилась электронная теорія, рассматривающая электричество, какъ особаго рода вещество, обладающее атомнымъ строеніемъ. Въ связи съ этой теоріей подвергся глубокой эволюціи взглядъ на химическій атомъ обыкновенной матеріи, и совершенно измѣнилась роль, приписываемая міровому ээиру ¹⁾. Наконецъ, возникло новое поразительное ученіе о релятивности, вызвавшее такой переломъ въ научномъ міровоззрѣніи, какого еще не было въ исторіи наукъ о природѣ, не исключая даже перехода отъ геоцентрическаго міровоззрѣнія къ геліоцентрическому.

Замѣчательная книга проф. Ми даетъ ясную и стройно законченную картину новаго ученія. Изложеніе, вездѣ оригинальное, можно назвать образцовымъ въ дидактическомъ отношеніи; оно безусловно популярное, ибо авторъ нигдѣ не пользуется серьезною математикой. Исходя изъ самаго элементарнаго, онъ, шагъ за шагомъ, доходитъ до изложенія новѣйшихъ завоеваній науки. Онъ не останавливается и передъ такимъ труднымъ, съ перваго взгляда, вопросомъ, какъ принципъ релятивности, не вошедшій еще ни въ одинъ изъ учебниковъ, появившихся въ Россіи, и посвящаетъ ему обширную главу. Даже весьма мало знакомый съ физикой безъ труда почерпнетъ изъ этой книги ясное представленіе о современномъ состояніи ученія объ электромагнитныхъ явленіяхъ, а спеціалисты, напримѣръ, учителя физики, не только узнаютъ все существенно новое, но и увидятъ передъ собою образецъ строго научнаго и все-таки популярнаго изложенія.

Этой книгѣ нельзя не пожелать самаго широкаго пространства.

Проф. О. Хвольсонъ.

ИЗЪ ПРЕДИСЛОВІЯ АВТОРА.

„Не можетъ быть ни малѣйшаго сомнѣнія въ томъ, что основой всей современной физики является ученіе объ электричествѣ. Оно занимаетъ теперь то положеніе, которое сто лѣтъ тому назадъ приписывалось механикѣ, а механика, подобно оптикѣ, все болѣе и болѣе превращается въ крупный отдѣлъ ученія объ электричествѣ. Несомнѣнно далѣе, что въ настоящее время существуетъ только одинъ научно обоснованный электромагнитный образъ мышленія, именно Максвел-

¹⁾ См. мою статью, приложенную къ переводу книги Майкельсона „Свѣтовые волны и ихъ примѣненія“ въ изданіи „Mathesis“.

ловскій методъ, развитый далѣе съ большею отчетливостью и строгостью теоріями Г. Лоренца. Всѣмъ извѣстно, однако, что электромагнитный образъ мышленія, несмотря на его основное значеніе для основной естественной науки — физики, не проникъ еще за предѣлы узкаго круга ученыхъ. И не только естествоиспытателямъ вообще, но даже многимъ лицамъ, весьма усердно занимающимся физикой, какъ, на примѣръ, преподавателямъ или техникамъ, онъ остается почти совершенно чуждымъ.

Причину этого, по моему мнѣнію, слѣдуетъ искать въ томъ, что до сихъ поръ никто еще не сдѣлалъ серьезной попытки развить Максвелловскій электромагнитный методъ мышленія индуктивнымъ путемъ, исходя изъ экспериментальнаго фактическаго матеріала. И хотя существуютъ прекрасные теоретическіе труды, въ которыхъ послѣдовательно проведенъ Максвелловскій методъ мышленія, экспериментальные курсы, въ узкомъ смыслѣ этого слова, стоятъ все еще на старинной точкѣ зрѣнія такъ называемыхъ дальнодѣйствій, и взгляды Фарадѣя и Максвелла, въ качествѣ „чистой теоріи“, только упоминаются въ нихъ въ видѣ дополненія.

Въ этой книгѣ я сдѣлалъ попытку построить все ученіе объ электромагнитизмѣ постепенно, шагъ за шагомъ, на фактическихъ данныхъ. Конечно, это проведено не безъ „предвзятостей“, такъ какъ нужно было группировать факты по опредѣленному плану и пользоваться опредѣленной терминологіей. Моя терминологія характеризуется тѣмъ, что я не боюсь употребленія словъ эфиръ или міровой эфиръ, и опредѣляю ученіе объ электричествѣ, какъ физику ээира или, *cum grano salis*, даже какъ механику ээира. Свойства ээира разсматриваются сначала, какъ вполне неизвѣстныя, и постепенно выясняются читателю изъ экспериментальныхъ данныхъ; конечно, этого обстоятельнаго можно было бы и не подчеркивать въ естественнонаучномъ учебникѣ. Такимъ образомъ, изложенію придана форма экспериментальнаго изученія физическихъ свойствъ ээира....“.

Книга МИ выйдетъ въ свѣтъ 4-мя выпусками.

Выходъ 1-го выпуска предполагается въ декабрѣ 1911 года, cadaго послѣдующаго черезъ два-три мѣсяца послѣ выхода предыдущаго.

Подписная цѣна на все изданіе 5 рублей.

Допускается разсрочка: при подпискѣ 2 руб., по полученіи которыхъ высылаются первый выпускъ; выпуски 2-й, 3-й и 4-й высылаются съ наложеніемъ платежа въ 1 руб. 10 коп. на каждый.

О всякой перемѣнѣ адреса издательства проситъ сообщать немедленно.

По выходѣ въ свѣтъ всего изданія цѣна будетъ повышена.

ВЪ НЕПРОДОЛЖИТЕЛЬНОМЪ ВРЕМЕНИ ВЫЙДЕТЬ ВЪ СВѢТЪ :

А. А. Майкельсонъ.

Свѣтотыя волны и ихъ примѣненія

Переводъ В. О. Хвольсонъ

подъ редакціей и съ дополненіями

заслуж. проф. О. Д. Хвольсона.

Около 9 печатн. листовъ, съ 108 черт. и тремя цвѣтными таблицами.

Содержаніе. Лекція I. Волновое движеніе и интерференція. Лекція II. Сравненіе микроскопа и телескопа съ интерферометромъ. Лекція III. Примѣненіе методовъ интерференціи для измѣренія разстояній и угловъ. Лекція IV. Примѣненіе методовъ интерференціи въ спектроскопіи. Лекція V. Свѣтотыя волны, какъ единицы длины. Лекція VI. Изслѣдованіе вліянія магнетизма на свѣтотыя волны при помощи интерферометра и ступенчатой рѣшетки (эшелона). Лекція VII. Приложенія интерференціоннаго метода въ астрономіи. Лекція VIII. Ээиръ.

Дополнительныя статьи проф. О. Д. ХВОЛЬСОНА:

1. Современное положеніе вопроса объ ээирѣ. ¶
2. Другой интерференціонный способъ изслѣдованія строенія спектральныхъ линій.

Отъ редактора: Редактируя этотъ переводъ, я стремился къ тому, чтобы изложеніе было по возможности удобопонятное. Для достиженія такой цѣли я добавилъ рядъ краткихъ статей, отчасти разъясняющихъ, отчасти дополняющихъ содержаніе отдѣльныхъ лекцій, Кромѣ того, я не считалъ нужнымъ съ точностью держаться текста оригинала. Вездѣ, гдѣ мнѣ это казалось цѣлесообразнымъ, я добавлялъ цѣлыя фразы или нѣсколько словъ. Такимъ образомъ этотъ переводъ довольно существенно отличается отъ оригинала,

О. Х.



Книгоиздательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

Одесса, Новосельская, 66.

МАТЕМАТИКА.

АДЛЕРЪ, А. ТЕОРІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПОСТРОЕНІЙ. Перев. съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. XXIV+325 стр. 8^о. Съ 177 рис. 1910. Ц. 2 р. 25 к.

Это качество... дѣлаетъ книгу единственной на русскомъ языкѣ въ данной отрасли геометріи. *Современный міръ.*

АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ. О КВАДРАТУРѢ КРУГА. Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составленной проф. **Ф. Рудіо.** (*Библиотека классиковъ*). Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Бернштейна*. VIII+155 стр. 8^о. Съ 21 черт. 1911 г. Ц. 1 р. 20 к.

БОЛЬЦАНО, В. ПАРАДОКСЫ БЕЗКОНЕЧНАГО. (*Библиотека классиковъ*). Перев. съ нѣмецк. подъ редакц. проф. *И. В. Слешинскаго*. VIII+120 стр. 8^о. Съ 12 черт. 1911 г. Ц. 80 к.

БОРЕЛЬ, Э. проф. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. Ч. I. Арифметика и алгебра. Въ обработкѣ проф. *В. Штёккеля*. Пер. съ нѣмецк. подъ ред. прив.-доц. *В. Ф. Кагана* съ приложеніемъ его статьи „О реформѣ преподаванія математики“ LXIV+434 стр. 8^о. 1911 г. Ц. 3 р.

WEBER H., Проф. Унив. въ Страсбургѣ, и **WELLSTEIN J.,** Проф. Унив. въ Гиссенѣ. **ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.** Руководство для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику. Перев. съ нѣмецк. подъ редакц. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Кагана*.

Томъ I. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА и АНАЛИЗЪ, * обраб. проф. *Веберомъ*. XXIV+666 стр. больш. 8^о. Съ 38 черт. 2-е изд. 1911 г. Ц. 4 р.

Вы все время видите передъ собой мастера своего дѣла, который съ любовью показываетъ великія творенія человѣческой мысли, извѣстныя ему до тончайшихъ подробностей.

Педагогическій Сборникъ.

Томъ II. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ, составлена: *Веберомъ, Вельштейномъ и Якобсталемъ.*

Книга I. ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ, * Состав. *И. Вельштейнъ*. XII+362 стр., больш. 8^о. Съ 142 чертеж. и 5 рис. 1909. Ц. 3 р.

Особый интересъ представляетъ въ книгѣ г. Вельштейна своеобразное изложеніе не-евклидовой геометріи, а также изложеніе проективной геометріи.

Журн. Мин. Н. Пр.

Книга II и III. ТРИГОНОМЕТРІЯ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ и СТЕРЕОМЕТРІЯ. Составили *Г. Веберъ и В. Якобсталь*. VIII+321 стр. больш. 8^о. Съ 109 черт. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

* Изданія, отмѣченныя звездочкой, признаны Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. заслуживающими вниманія при пополненіи ученическихъ библиотекъ среднихъ учебныхъ заведеній.

ГЕЙБЕРГЪ, I. Проф. **НОВОЕ СОЧИНЕНИЕ АРХИМЕДА ***. Послание Архимеда къ Эратоссею о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. (*Библ. класс.*) Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко*. XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ .. будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоценной научной находкой.. *Образование.*

ДЕДЕКИНДЪ, Р. проф. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.** * (*Библиотека классиковъ*). Пер. съ нѣм. съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*, съ присоединеніемъ его статьи: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ“. 2-е изд. 40 стр. 8° 1909. Ц. 40 к.

Небольшой по объему, но, такъ сказать, законодательный по содержанию трудъ... *Русская Школа.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **ЗАДАЧА ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ ВЪ СОВРЕМЕННОЙ ПОСТАНОВКѢ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертации на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 черт. 1908. Ц. 35 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРА?** * 72 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

Книжка написана яснымъ простымъ языкомъ и, несомнѣнно, вызоветъ къ себѣ интересъ. *Русская Мысль.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **ВВЕДЕНИЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНИЕ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ.** * Пер. съ нѣмецк. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. 1909. Ц. 1 р.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ. *Русская Школа.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ.** Пер. съ нѣмецк. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго*. VIII+496 стр. 8°. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Курсъ профессора боннскаго университета, несомнѣнно, является однимъ изъ лучшихъ по ясности и чрезвычайной строгости обоснованія одного изъ могущественныхъ методовъ современнаго анализа. *Современный Мѣръ.*

КУТЮРА, Л. **АЛГЕБРА ЛОГИКИ.** Переводъ съ французскаго съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго*. IV+107+XIII стр. 8°. 1909. Ц. 90 к.

КЭДЖОРИ, Ф. проф. **ИСТОРІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (съ указаніями на методы преподаванія) ***. Перев. съ англійск. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко*. VIII+368 стр. 8°. Съ рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна... Мы настоятельно рекомендуемъ „Исторію элем. мат.“ Кэджори. *Вѣсти. Воспитанія.*

МАРКОВЪ, А. акад. **ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ.** Въ 2-хъ частяхъ. Изд. 2-е, исправлен. и дополнен. VIII+274 стр. 8° 1911. Ц. 2 р. 25 к.

НЕТТО, Е. проф. **НАЧАЛА ТЕОРИИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ.** Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. VIII+156 стр. 8°. 1912. Ц. 1 р. 20 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **НАУКА И МЕТОДЪ.** Пер. съ французскаго *И. Брусиловскаго* подъ ред. прив.-доц. *В. Каганъ*. VIII+384 стр. 16° 1910. Ц. 1 р. 50 к.

... книгу Пуанкаре можно рекомендовать особому вниманію преподавателей математики и естествознанія. *Вѣстникъ Воспитанія.*

РОУ, С. **ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ СЪ КУСКОМЪ БУМАГИ.** Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16°. Съ 87 рис. и чертежами. 1910. Ц. 90 к.

Производитъ впечатлѣніе гармоничнаго цѣлаго и читается съ большимъ интересомъ. *Русская Школа.*

РУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОГРАФИЯ. Вып. I. Списокъ сочинений по чистой прикладной математикѣ, напечатанныхъ въ Россіи въ 1908 г. Подъ редакціей проф. *Д. М. Синцова*. 76 стр. 8^о. 1911. Ц. 60 к.

ЦИММЕРМАНЪ, Б. проф. ОБЪЕМЪ ШАРА, ШАРОВОГО СЕГМЕНТА и ШАРОВОГО СЛОЯ. 34 стр. 16^о. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

ШУБЕРТЪ, Г. проф. МАТЕМАТИЧЕСКІЯ РАЗВЛЕЧЕНІЯ и ИГРЫ. Пер. съ нѣмецк. *Г. Левинтова*, подъ ред., съ прим. и добавл. „В. Оп. Физ. и Элемен. Матем.“ XIV+358 стр. 16^о. Со многими таблицами 1911. Ц. 1 р. 40 к.

Ф И З И К А.

АБРАГАМЪ, Г. проф. СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ * Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга*.

Часть I: XVI+272 стр. 8^о. Свыше 300 рисунковъ. 2-е изданіе. 1909. Ц. 1 р. 50 к.

Систематически составленный сводъ наиболѣе удачныхъ, типичныхъ и поучительныхъ опытовъ. *Вѣстникъ и Библиотека Самообразованія.*

Часть II: 434+LXXV стр. 8^о. Свыше 400 рис. 2-е изданіе 1910 г. Ц. 2 р. 75 к.

Мы надѣемся, что разбираемый трудъ станетъ настольной книгой каждой физической лабораторіи въ Россіи. *Русская Мысль.*

АУЭРБАХЪ, Ф. проф. ЦАРИЦА МІРА и ЕЯ ТѢНЬ. * Общедоступное изложеніе основаній ученія объ энергіи и энтропіи. Пер. съ нѣм. VIII+50 стр. 8^о. 5-е изданіе 1911. Ц. 40 к.

Слѣдуетъ признать брошюру Ауэрбаха чрезвычайно интересн. *Ж. М. Н. Пр.*

БРАУНЪ, Ф. проф. МОИ РАБОТЫ ПО БЕЗПРОВОЛОЧНОЙ ТЕЛЕГРАФИИ и ПО ЭЛЕКТРООПТИКѢ. Рѣчь, произнесенная по случаю получения Нобелевской преміи, съ дополн. автора. Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*, со вступит. статей переводчиковъ. XIV+92 стр. 16^о. Съ 25 рис. и портретомъ автора 1911. Ц. 70 к.

БРУНИ, К. проф. ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ *. Пер. съ итал. * подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физики и Эл. Мат.“ 37 стр. 16^о. 1909. Ц. 25 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТІЕ ФИЗИКИ *. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. Съ Прилож. рѣчи *А. Бальфура*. Нѣсколько мыслей о НОВОЙ ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВА. VIII+319 стр. 8^о. Съ 5 порт., 6 табл. и 33 рис. Ц. 2 р.

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуеъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго гения. *Современный Мір.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. СНѢГЪ, ИНЕЙ, ГРАДЪ, ЛЕДЪ и ЛЕДНИКИ * IV+127 стр. 8^о. Съ 137 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. 1 р. „Mathesis“ можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

ВИНЕРЪ, О. проф. О ЦВѢТНОЙ ФОТОГРАФИИ и РОДСТВЕННЫХЪ ЕЙ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХЪ ВОПРОСАХЪ *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*. VI+69 стр. 8^о. Съ 3 цвѣт. табл. 1911. Ц. 60 к.

ГЕРНЕТЪ, В. А. ОБЪ ЕДИНСТВѢ ВЕЩЕСТВА. 46 стр. 16^о Ц. 25 к.

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННОЙ СПЕКТРОСКОПИ. * Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣст. Оп. Ф. и Эл. М.“ 45 стр. 16°. 1910. Ц. 25 к.

Одинъ изъ лучшихъ обзорѣвъ... Онъ содержитъ, въ сжатомъ видѣ, исторію открытія спектральнаго анализа и дальнѣйшаго ея развитія до нашихъ дней.
Журн. Мин. Н. Пр.

КЛОССОВСКИЙ, А. проф. ОСНОВЫ МЕТЕОРОЛОГИИ. * XVI+527 стр. больш. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. 4 р.

Честь и слава „Mathesis“ за изданіе этой прекрасной книги, которою можно гордиться русская наука.
Ж. М. Н. Пр.

КЛОССОВСКИЙ, А. проф. ФИЗИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ НА ОСНОВАНІИ СОВРЕМЕННЫХЪ ВОЗЗРѢНІЙ. * 46 стран. 80. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи
Педагогическій Сборникъ.

КОНЪ, Э. проф. и **ПУАНКАРЕ Г.**, акад. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ФИЗИКИ. Пер. подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“ 81 стр. 16°. Съ 11 рис. 1912. Ц. 40 к.

ЛАКУРЪ П. и АППЕЛЬ Я. ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. * Перев. съ нѣм. подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физики и Эл. Мат.“. Въ 2-хъ томахъ большого формата, 892 стр. Съ 799 рисун. и 6 отдѣльными цвѣтными таблицами. 1908. Ц. 7 р. 50 к.

Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ...
Ж. М. Н. Пр.

ЛЕМАНЪ, О. проф. ЖИДКІЕ КРИСТАЛЛЫ и ТЕОРИИ ЖИЗНИ. Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

....весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, слѣпанная проф. Леманомъ.
Педагогическій Сборникъ.

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. СПЕКТРЪ и ФОРМА АТОМОВЪ. Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 23 стр. 16°. 2-е изданіе. Ц. 15 к.

ЛОДЖЪ, О. проф. МИРОВОЙ ЭИРЪ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Д. Хмырова.* VI+216 стр. 16°. Съ 19 рис. 1911. Ц. 80 к.

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. КУРСЪ ФИЗИКИ. * Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* Съ добавленіями автора къ русскому изданію.

Т. I. VIII+248 стр. больш. 8°. Съ 236 рис. 1910. Ц. 2 р. 75 к.

Т. II. VIII+466 стр. больш. 8°. Съ 257 рис. 1910. Ц. 3 р. 75 к.

Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики.
Ж. М. Н. Пр.

ПЕРРИ, ДЖ. проф. ВРАЩАЮЩИЙСЯ ВОЛЧОКЪ. * Публичная лекція. Пер. съ англ. VIII+96 стр. 8°. Съ 63 рис. 3-е изданіе. 1912. Ц. 60 к.

Книжка, воочію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цеховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при его популяризаціи.
Русская Школа.

ПЛАНКЪ, М. проф. ОТНОШЕНІЕ НОВѢЙШЕЙ ФИЗИКИ КЪ МЕХАНИСТИЧЕСКОМУ МИРОВОЗЗРѢНІЮ. Пер. съ нѣм. *І. Левинтова,* подъ ред. „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“. 42 стр. 16°. 1911. Ц. 25 к.

РАМЗАЙ, В. проф. БЛАГОРОДНЫЕ и РАДИОАКТИВНЫЕ ГАЗЫ. Пер. подъ ред. „Вѣст. О. Ф. и Э. М.“. 37 стр. 16°. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

РИГИ, А. проф. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ. * (Ионы, электроны, радиоактивность). Пер. съ 3 итальян. изданія. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис. 1910. 2-е изданіе. Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному челоѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

РИГИ, А. проф. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МАТЕРІИ. * Вступительная лекція. Пер. съ итальян. подъ ред. „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“. 28 стр. 8°. 2-е изданіе. 1911. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго профессора Болоньскаго универ. *Ж. М. Н. Пр.*

СЛАБИ, А. проф. БЕЗПРОВОЛОЧНЫЙ ТЕЛЕФОНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣст. О. Ф. и Э. М.“. 28 стр. 8°. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

СЛАБИ, А. проф. РЕЗОНАНСЪ и ЗАТУХАНІЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХЪ ВОЛНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

Обѣ брошюры принадлежать перу большого знатока предмета и выдающаго самостоятельнаго работника въ области практическаго примѣненія электрическихъ волнъ. *Педагогическій Сборникъ.*

СОДДИ, Ф. проф. РАДІЙ и ЕГО РАЗГАДКА. * Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Хмырова.* VII+190 стр. 8°. Съ 31 рис. 1910. Ц. 1 р. 25 к.

... авторъ въ увлекательномъ изложеніи вводитъ читателя въ необыкновенно заманчивую область... *Педагогическій Сборникъ.*

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. КОРПУСКУЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВА, Пер. съ англ. *І. Левинтова,* подъ ред. „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“. VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. 1910. Ц. 1 р. 20 к.

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. ДОБЫВАНІЕ СВѢТА * Общедоступная лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Британск. Ассоціаціи 1906. Перев. съ англ. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта. *Ж. М. Н. Пр.*

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей подъ ред. „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.

Вып. I. * VIII+148 стр. 8°. Съ 41 рис. и 2 табл. изд. 3-е 1909. Ц. 75 к.

Изясно изданный и недорогой сборникъ прочтется каждымъ интересующимся съ большимъ интересомъ. *Вѣстникъ Знанія.*

Вып. II. IV+204 стр. съ 50 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

Х И М І Я.

МАМЛОКЪ, Л. д-ръ. СТЕРЕОХИМІЯ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+164 стр. 8°. Съ 58 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

РАМЗАЙ, В. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИЗУЧЕНІЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМІИ. Перев. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+76 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

Главный интересъ обзора конечно въ томъ, что онъ сдѣланъ крупнымъ самостоятельнымъ изслѣдователемъ въ этой области. *Педагогическій Сборникъ.*

СМИТЪ, А. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ НЕОРГАНИЧЕСКУЮ ХИМІЮ. Пер. англ. подъ ред. *П. Г. Меликова.* XVI+840 стр. 8°. Съ 107 рис. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Такіе первокласные ученые, какъ Лёбъ, Освальдъ и др. признали, что „Введеніе въ неорганическую химию“ Смита обогащаетъ учебную литературу и въ ряду многочисленныхъ руководствъ по химіи должно занять особое, значительное мѣсто. *Речь.*

ШЕЙДЪ, К. ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ ДЛЯ ЮНОШЕСТВА. Пер. съ нѣмецк. подъ ред. лаборанта *Е. С. Ельчанинова*. IV+192 стр. 8°. Съ 79 рисунками. 1907. Ц. 1 р. 20 к.

ШТОКЪ, А. проф. и **ШТЕЛЛЕРЪ**, прив.-доц. ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО КОЛИЧЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ. Пер. съ нѣм. лабор. Новор. Унив. *А. І. Коншина* подъ ред. проф. *П. Г. Меликова*. Перев. съ нѣм. VIII+172 стр. 8°. Съ 37 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

А С Т Р О Н О М І Я

АРРЕНИУСЪ, Св. проф. ОБРАЗОВАНИЕ МИРОВЪ *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго*. VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. 2-е изд. 1912. Ц. 1 р. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаниемъ. *Педагог. Сборн.*

АРРЕНИУСЪ, Св. проф. ФИЗИКА НЕБА *. Перев. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. VIII+250 стр. 8°. 66 черн. и 2 цвѣтн. рис. въ текстѣ. Черная и спектр. таблицы. 1905. Изданіе распродано.

Научность содержанія, ясность и простота изложенія и превосходный переводъ соперничаютъ другъ съ другомъ. *Русская Мысль.*

БОЛЛЪ, Р. С. проф. ВѢКА и ПРИЛИВЫ. Перев. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. 104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 табл. Ц. 75 к.

.....настоящее изданіе „Mathesis“ слѣдуетъ приветствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

ВИХЕРТЪ, Э. проф. ВВЕДЕНИЕ ВЪ ГЕОДЕЗИЮ *. Перев. съ нѣм. 80 стр. 16°. Съ 14 рис. 2-е изд. 1912. Ц. 35 к.

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя въ виду пользованіе ею въ школѣ въ качествѣ практическаго пособия... Изложенія очень сжато, по полнотѣ и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ГРАФФЪ, К. КОМЕТА ГАЛЛЕЯ *. Пер. съ нѣм. VIII+71 стр. 16°. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изд. второе исправл. и доп. 1910. Ц. 30 к.

Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Педагог. Сборникъ*

ГАЛЛЕЕВА КОМЕТА ВЪ 1910 ГОДУ *Общедоступное изданіе*. Содержаніе: О вселенной — О кометахъ — О кометѣ Галлея. 32 стр. 8°. Съ 12 иллюстраціями. 1910. Ц. 12 к.

ЛОВЕЛЛЪ. МАРСЪ и ЖИЗНЬ НА НЕМЪ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. VI+272 стр. 8°. Со мн. рис. и 1 цвѣтн. табл. 1912. Ц. 2 р.

НЬЮКОМЪ, С. проф. АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ *. Перев. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. XX+288 стр. 8°. Съ портретомъ автора, 64 рис. и 1 табл. 2-е изданіе 1911. Ц. 1 р. 50 к.

И вполне научно, и совершенно доступно, и изящно написанная книга... переведена и издана очень хорошо. *Вѣстникъ Воспитанія.*

НЬЮКОМЪ, С. проф. ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ. (Исторія и современное состояніе этого вопроса) 26 стр. 16°. Ц. 20 к.

ФУРНЬЕ ДАЛЬБЪ. ДВА НОВЫХЪ МИРА. I. Инфра-міръ. 2 Супра-міръ. Пер. съ англ. VII+119 стр. 8°. Съ 1 рис. и 1 табл. 1911. Ц. 80 к.

V A R I A.

ГАМПСОМЪ-ШЕФЕРЪ. ПАРАДОКСЫ ПРИРОДЫ *. Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчій съ повседневымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8°. Съ 67 рис. Ц. 1 р. 20 к.

Матеріалъ подобранъ интересный.

Журн. М. Н. Пр.

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „МАТЕЗИСЪ“.

ГАССЕРТЪ, К. проф. ИЗСЛѢДОВАНИЕ ПОЛЯРНЫХЪ СТРАНЪ. Исторія путешествій къ сѣверному и южному полюсамъ съ древнѣйшихъ временъ до настоящаго времени. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. проф. *Г. И. Танфильева*. XII+216 стр. 8°. Съ двумя цвѣтными картами. 1912. Ц. 1 р. 50 к.

ГРОТЪ, П. проф. ВВЕДЕНИЕ ВЪ ХИМИЧЕСКУЮ КРИСТАЛЛОГРАФИЮ. Перев. съ нѣмц. *И. Левинтова* подъ ред. проф. *М. Д. Сидоренко*. VIII+112 стр. 8°. Съ 6 черт. 1912. Ц. 80 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ЦВѢТОВЪ СПЕКТРА. Съ приложеніемъ статьи *В. Ритца* „Линейные спектры и строеніе атомовъ“. 50 стр. 16°. Ц. 30 к.

ЛѢБЪ, Ж. проф. ДИНАМИКА ЖИВОГО ВЕЩЕСТВА. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова*. VIII+352 стр. 8°. Съ 64 рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Классическая книга Лѣба, отъ чтенія которой трудно оторваться, устанавливаетъ вѣхи достигнутаго въ познаніи динамики живого вещества.

Русское Богатство

НИМФЮРЪ, Р. ВОЗДУХОПЛАВАНІЕ. * Научныя основы и техническое развитіе Пер. съ нѣм. VIII+161 стр. 8°. Съ 52 рис. 1910. Ц. 90 к.
Въ книгѣ собранъ весьма обширный описательный матеріалъ.

Журн. Мин. Нар. Пр.

СНАЙДЕРЪ, К. проф. КАРТИНА МІРА ВЪ СВѢТѢ СОВРЕМЕННАГО ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова*. VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отдѣльными портретами. 1909. Ц. 1 р. 50 к.
Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Педагог. Сборникъ*.

ТРОМГОЛЬТЪ, С. ИГРЫ СО СПИЧКАМИ. Задачи и развлечения. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. Изд. второе 1912. Ц. 50 к.

УШИНСКІЙ, Н. проф. ЛЕКЦИИ ПО БАКТЕРІОЛОГИИ. VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. 1 р. 50 к.

ШМИДЪ, Б. проф. ФИЛОСОФСКАЯ ХРЕСТОМАТІЯ. * Перев. съ нѣм. *Ю. А. Говсъева*. подъ ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге*. VIII+172 стр. 8°. 1907. Ц. 1 р. —

...Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ.

Вопросы философіи и психологіи.

Имѣются на складѣ:

МУЛЬТОНЪ Ф., проф. ЭВОЛЮЦИЯ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ. Пер. съ англійск. IV+82 стр. 16°. Съ 12 рис. 1908. Ц. 50 к.

Изложеніе гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.

БИЛЬТЦЪ Г. и В. УПРАЖНЕНІЯ ПО НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ. Пер. съ нѣм. *А. С. Комаровскаго*. съ предисловіемъ проф. *Л. В. Писаржевскаго*. XVI+272 стр. 8. Съ 24 рис. Ц. 1 р. 60 к.

Печатаются и готовятся къ печати:

АППЕЛЬ П. и ДОТЕВИЛЛЬ С. КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. (Около 48 печатн. лист. въ двухъ выпускахъ). Пер. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

Книга по содержащемуся въ ней материалу соответствуетъ университетскому курсу теоретической механики и представляетъ собой сокращенную переработку обширнаго трехтомнаго трактата П. АППЕЛЯ по теоретической механикѣ.

БОРЕЛЬ - ШТЕККЕЛЬ. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. Ч. II. ГЕОМЕТРИЯ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.*

БАХМАНЪ, проф. ОСНОВЫ НОВѢЙШЕЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛЪ Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

КЛЕЙНЪ, проф. ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКѢ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.*

АНДУАЙЕ, проф. КУРСЪ АСТРОНОМИИ. Пер. съ французскаго.

МОРЕНЪ, проф. ФИЗИЧЕСКІЯ СОСТОЯНІЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Л. В. Писаржевскаго.*

ДЗЮБЕКЪ, проф. КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ Въ 2 част. Пер. съ нѣм. подъ ред. преподавательницы С.-П.-Б. высш. жен. курсовъ *В. I. Шиффъ.*

КЛАРКЪ, А. ИСТОРИЯ АСТРОНОМИИ XIX СТОЛѢТІЯ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. С.-П.-Б. универ. *В. Серафимова.*

ВЕРИГО, Б. Ф. проф. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ БИОЛОГІИ. Около 40 печатныхъ листовъ, въ 2 томахъ.

ЛАГРАНЖЪ, Ж. ДОПОЛНЕНІЯ КЪ „ЭЛЕМЕНТАМЪ АЛГЕБРЫ“ ЭЙЛЕРА. Неопредѣленный анализъ. Переводъ съ франц. подъ редакц. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.*

ЧЕЗАРО, Э. проф. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКАГО АНАЛИЗА и ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНОМАЛЫХЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П.-Б. универс. *К. Поссе.*

МИ, Г. проф. КУРСЪ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА и МАГНЕТИЗМА. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *О. Хвольсона.*

ЛАДЕНБУРГЪ, А. проф. ЛЕКЦИИ ПО ИСТОРИИ ХИМІИ ОТЪ ЛАВУАЗЬЕ ДО НАШИХЪ ДНЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова.*

ЦЕНТНЕРШВЕРЪ, М. ОЧЕРКИ ИСТОРИИ ХИМІИ.

МОРГАНЪ, проф. ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМІЯ Пер. съ нѣм.

МАЙКЕЛЬСОНЪ, проф. СВѢТОВЫЯ ВОЛНЫ и ИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *О. Хвольсона.*

ШУЛЬЦЕ, д-ръ. ВЕЛИКІЕ ФИЗИКИ и ИХЪ ТВОРЕНІЯ. Пер. съ нѣмецкаго.

УСПѢХИ ХИМІИ. СБОРНИКЪ СТАТЕЙ. Вып. I.

УСПѢХИ БИОЛОГІИ. СБОРНИКЪ СТАТЕЙ. Вып. I.

Подробный каталогъ изданій вьсылается по требованію бесплатно.

Выписывающіе изъ главнаго склада „МАТЕЗИСЪ“
Новосельская, 66) на сумму 5 руб. и болѣе за
не платятъ.

БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ

Библіотека содержитъ только такія классическія творенія великихъ мыслителей въ области математики и естествознанія, которыя читаются безъ большого напряженія и не требуютъ особенной подготовки со стороны читателя. Редакторы снабжаютъ каждый переводъ примѣчаніями и разъясненіями тѣхъ мѣстъ, пониманіе которыхъ представляется сколько-нибудь затруднительнымъ. Научная коммиссія „Mathesis“ въ своемъ выборѣ книгъ для Библіотеки классиковъ стремится дать возможность молодому поколѣнію черпать доступныя для него знанія изъ первоисточниковъ.

Въ настоящее время вышли въ свѣтъ слѣдующіе выпуски:

I. Р. ДЕДЕКИНДЪ. Непрерывность и ирраціональныя числа. Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго* 40 стр. 8⁰. Изд. 2-е. Ц. 40 к.
Идеи, развитыя въ этомъ замѣчательномъ трудѣ, составляютъ въ настоящее время основу всего высшаго анализа. Къ книгѣ приложена статья переводчика: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ (по Cantor'у)“.

II. АРХИМЕДЪ. Посланіе къ Эратосѣну о нѣкоторыхъ теоремахъ механики Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣстника Оп. Физики и Элем. Математики“. Съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко*. XV+27 стр. 8⁰ Ц. 40 к. (См. каталогъ *И. Гейбергъ. Новое сочиненіе Архимеда*).

Сочиненіе содержитъ въ себѣ общіе методы, какими пользовался Архимедъ при нахожденіи площадей, объемовъ и центровъ тяжести; эти методы свидѣтельствуютъ, что великій греческій геометръ былъ весьма близокъ къ идеямъ современнаго интегральнаго исчисленія.

III. АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ. О квадратурѣ круга. Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составленной проф. *Ф. Рудіо*. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Н. Бернштейна*. VIII+155 стр. 8⁰. Съ 21 черт. Ц. 1 р. 20 к.

Послѣ того, какъ задача о квадратурѣ круга была совершенно исчерпана доказательствомъ трансцендентности числа π , профессоръ Рудіо счелъ нужнымъ обратить вниманіе на тѣ древнѣйшія работы, которымъ задача о квадратурѣ круга обязана своимъ развитіемъ.

IV. Б. БОЛЬЦАНО. Парадоксы безконечнаго, изданные по посмертной рукописи автора *др. Фр. Пржигонскимъ*. Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго*. VIII+119 стр. 8⁰. Ц. 80 к.

Въ этомъ сочиненіи Больцано является предшественникомъ Кантора въ теоріи безконечныхъ многообразій. Онъ устанавливаетъ и развиваетъ тѣ свойства безконечнаго, которыя легли въ основаніе теоріи Кантора.

Печ таятся и готовятся къ печати:

V. I. ЛАГРАНЖЪ. Прибавленія къ „Элементарамъ Алгебры“ Эйлера. Неопредѣленный анализъ. Переводъ съ французскаго подъ редакціей приватъ-доцента *С. О. Шатуновскаго*.

Въ этихъ прибавленіяхъ впервые дано полное рѣшеніе неопредѣленнаго квадратнаго уравненія съ двумя неизвѣстными въ самомъ общемъ видѣ. По изысканію и глубинѣ методовъ эта книга несомнѣнно представляетъ собой одинъ изъ перловъ среди твореній великаго геометра.

VI. ЕВКЛИДЪ. Первые шесть книгъ „Началъ“. Переводъ проф. *Д. М. Синцова* и пр.-доц. *С. Н. Бернштейна*.

VII. САДИ-КАРНО. О движущей силѣ огня.

VIII. БРАВЕ. Математическія начала кристаллографіи.

Съ требованіями обращаться
въ главный складъ изданій „МАТЕЗИСЪ“

Одесса, Новосельская бб.

Отдѣленія склада изданій „Mathesis“:

Въ Москвѣ—Книжный магазинъ „Образованіе“, Кузнецкій мостъ, 11.

Въ С.-Петербургѣ—Книжный магазинъ Г. С. Цукермана, Александровская площадь, 5.

Въ Варшавѣ—Книжный магазинъ „Оросъ“, Новый Свѣтъ, 70.

Въ Кіевѣ—Книжный магазинъ В. А. Просяниченко, Фундуклеевская.

Продажа изданій „МАТЕЗИСЪ“ съ разсрочкой платежа у Акціонернаго Общества „Лекторъ“ въ Вильнѣ.

ОБЪЯВЛЕНІЕ.

Вѣстникъ Опытной Физики

Выходитъ 24 раза въ годъ
отд. вып. не меньше 24
стр. каждый

и
Элементарной Математики

подъ ред. прив.-доц.
В. Ф. Кагана.

Подписная цѣна съ пер. за годъ 6 руб., за $\frac{1}{2}$ года 3 руб. Учащіе въ низшихъ училищахъ и всѣ учащіеся платятъ за годъ 4 руб. за $\frac{1}{2}$ года 2 руб.

ПРОБНЫЙ НОМЕРЪ БЕЗПЛАТНО.

Адресъ: ОДЕССА, въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.



Тип. Акц. Южно-Русского
О-ва Печ. Дѣла, Одесса,
Пушкинская, соб. домъ 18.

<http://mathesis.ru>

2 р. 50 к.